DẠNG 2. Viết phương trình chính tắc của hypebol.

1. Phương pháp giải.

Để viết phương trình chính tắc của hypebol ta làm như sau:

+ Gọi phương trình chính tắc hypebol là $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$

+ Từ giả thiết của bài toán ta thiết lập các phương trình, hệ phương trình từ giải thiết của bài toán để tìm các đại lượng a,b của hypebol từ đó viết được phương trình chính tắc của nó.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1. Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) trong mỗi trường hợp sau:

a) (H) có một tiêu điểm tọa độ là $(-4;0)$ và độ dài trục ảo bằng $\sqrt{28}$

b) (H) có tiêu cự bằng 10 và đường tiệm cận là $y=\pm\frac{4}{3}x$

c) (H) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{13}}{3}$ và diện tích hình chữ nhật cơ sở bằng 48

d) (H) đi qua hai điểm $M(\sqrt{2};2\sqrt{2})$ và $N(-1;-\sqrt{3})$

e) (H) đi qua $M(-2;1)$ và góc giữa hai đường tiệm cận bằng 60^0.

Lời giải: Gọi phương trình chính tắc của (H) là: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ với $b^2=c^2-a^2$

a) (H) có một tiêu điểm tọa độ là $(-4;0)$ suy ra $c=4$; độ dài trục ảo bằng $\sqrt{28}$ suy ra $2b=\sqrt{28}\Rightarrow b^2=7,\ a^2=c^2-b^2=9$

Vậy phương trình (H) là $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$

b) (H) có tiêu cự bằng 10 suy ra $2c=10\Rightarrow a^2+b^2=25$ (1); đường tiệm cận là $y=\pm\frac{4}{3}x$ suy ra $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$ hay $b^2=\frac{16}{9}a^2$ (2)

Thế (2) vào (1) $a^2 + \frac{16}{9}a^2 = 25 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Rightarrow b^2 = 16$

Vậy phương trình (H) là $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

c) Tâm sai bằng $\frac{\sqrt{13}}{3}$ suy ra $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$ hay $4a^2 = 9b^2$ (3)

Diện tích hình chữ nhật cơ sở bằng 24 suy ra $2a.2b = 48 \Leftrightarrow ab = 12$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $a^2 = 18; b^2 = 8$

Vậy phương trình (H) là $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1$

d) (H) đi qua hai điểm $M\left(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$ và $N\left(-1; -\sqrt{3}\right)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} \frac{2}{a^2} - \frac{8}{b^2} = 1 \\ \frac{1}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{2}{5} \\ b^2 = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình (H) là $\frac{x^2}{\frac{2}{5}} - \frac{y^2}{2} = 1$

e) $M\left(-2; 1\right) \in \left(H\right)$ nên $\frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$ (*)

Phương trình hai đường tiệm cận là:

$\Delta_1 : y = \frac{b}{a}x$ hay $bx - ay = 0$; $\Delta_2 : y = -\frac{b}{a}x$ hay $bx + ay = 0$

Vì góc giữa hai đường tiệm cận bằng 60^0 nên $\cos 60^0 = \frac{\left|b^2 - a^2\right|}{b^2 + a^2}$

Hay $\frac{1}{2} = \frac{\left|b^2 - a^2\right|}{b^2 + a^2} \Leftrightarrow 2\left|b^2 - a^2\right| = a^2 + b^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2(b^2 - a^2) = b^2 + a^2 \\ 2(b^2 - a^2) = -(b^2 + a^2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2 = 3a^2 \\ a^2 = 3b^2 \end{array}\right.$

+ Với $b^2 = 3a^2$ thay vào (*) được $a^2 = \frac{11}{3}$, $b^2 = 11$

Suy ra phương trình hypebol là (H): $\frac{x^2}{\frac{11}{3}} - \frac{y^2}{11} = 1$

+ Với $a^2 = 3b^2$ thay vào (*) được $a^2 = 1$, $b^2 = \frac{1}{3}$

Suy ra phương trình hypebol là (H): $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$

Vậy có có hai hypebol thỏa mãn có phương trình là $\frac{x^2}{\frac{11}{3}} - \frac{y^2}{11} = 1$ và

$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.127: Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) trong mỗi trường hợp sau:

a) (H) có tâm sai $e = 2$, các tiêu điểm của (H) trùng với các tiêu điểm của elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

b) Độ dài trục ảo là 6 và phương trình một đường tiệm cận là $3x - 4y = 0$.

c) (H) đi qua điểm điểm A$\left(-4; \frac{2\sqrt{7}}{3}\right)$ và phương trình 2 đường tiệm cận là $2x \pm 3y = 0$

d) (H) đi qua điểm $M\ \ 6;3$ và góc giữa 2 đường tiệm cận bằng 60^0

e) Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là
$x \pm 5 = 0$; y $\pm$ 4=0

f) Độ dài trục ảo là 6 và hai tiệm cận vuông góc với nhau.

g) Đi qua M$\left(3;\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$ và 2 đường chuẩn có phương trình: $3x \pm 4 = 0$

h) Khoảng cách giữa các đường chuẩn là $\dfrac{32}{\sqrt{7}}$ và phương trình 2 đường tiệm cận là $3x \pm 4y = 0$

k) (H) đi qua A(1; 0) và $B\ \sqrt{3};1$

l) (H) có tiêu điểm $F_1\ -7;0$ và đi qua $M\ -2;12$

Bài 3.128: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho elip (E): $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{2} = 1$. Viết phương trình hypebol (H) có hai đường tiệm cận là $y = \pm 2x$ và có hai tiêu điểm là hai tiêu điểm của elip (E).