Bài toán 02: CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG – BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUI

Phương pháp:

- Để chứng minh ba điểm (hay nhiều điểm) thẳng hàng ta chứng minh chúng là điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt, khi đó chúng nằm trên đường thẳng giao tuyên của hai mặt phẳng nên thẳng hàng.
- Để chứng minh ba đường thẳng đồng qui ta chứng minh giao điểm của hai đường thẳng thuộc đường đường thẳng còn lại.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $SABC$. Trên SA,SB và SC lấy các điểm D,E và F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K.

Chứng minh ba điểm I,J,K thẳng hàng.

Lời giải.

Ta có $I = DE \cap AB, DE \subset (DEF) \Rightarrow I \in (DEF)$;

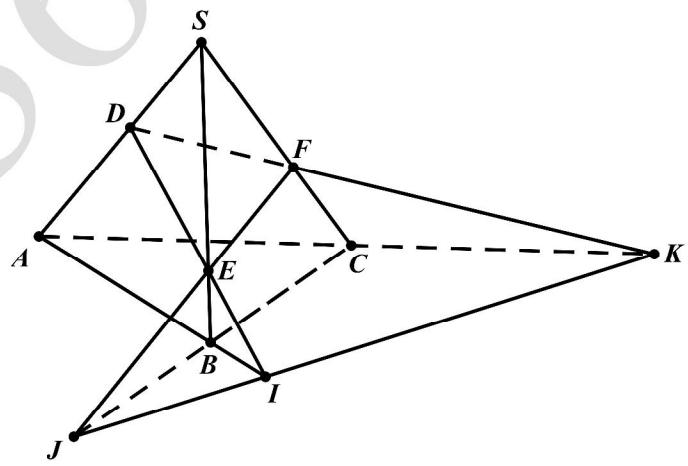
$AB \subset (ABC) \Rightarrow I \in (ABC)$ (1).

Tương tự $J = EF \cap BC$

$\Rightarrow \begin{cases} J \in EF \in (DEF) \\ J \in BC \subset (ABC) \end{cases}$ (2)

$K = DF \cap AC$

$\Rightarrow \begin{cases} K \in DF \subset (DEF) \\ K \in AC \subset (ABC) \end{cases}$ (3) Từ



(1),(2) và (3) ta có I,J,K là điểm chung của hai mặt phẳng (ABC) và (DEF) nên chúng thẳng hàng.

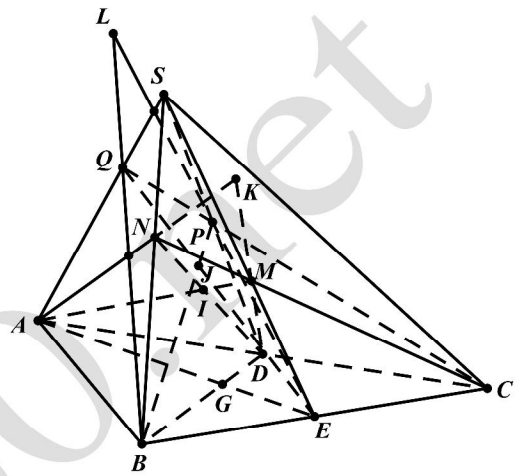
Ví dụ 2. Cho tứ diện $SABC$ có D,E lần lượt là trung điểm của AC,BC và G là trọng tâm của tam giác ABC. Mặt phẳng (α) đi qua AC cắt SE,SB lần

lượt tại M,N. Một mặt phẳng (β) đi qua BC cắt SD,SA tương ứng tại P và Q.

a) Gọi $I = AM \cap DN, J = BP \cap EQ$. Chứng minh S,I,J,G thẳng hàng.

b) Giả sử $K = AN \cap DM, L = BQ \cap EP$. Chứng minh S,K,L thẳng hàng.

Lời giải.



a) Ta có $S \in (SAE) \cap (SBD)$, (1)

$$G = AE \cap BD \Rightarrow \begin{cases} G \in AE \subset (SAE) \\ G \in BD \subset (SBD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G \in (SAE) \\ G \in (SBD) \end{cases} \quad (2)$$

$$I = AM \cap DN \Rightarrow \begin{cases} I \in DN \subset (SBD) \\ I \in AM \subset (SAE) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in (SBD) \\ I \in (SAE) \end{cases} \quad (3)$$

$$J = BP \cap EQ \Rightarrow \begin{cases} J \in BP \subset (SBD) \\ J \in EQ \subset (SAE) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J \in (SBD) \\ J \in (SAE) \end{cases} \quad (4)$$

Từ (1),(2),(3) và (4) ta có S,I,J,G là điểm chung của hai mặt phẳng (SBD) và (SAE) nên chúng thẳng hàng.

Ví dụ 3. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA,SB,SC,SD tưng ứng tại các điểm M,N,P,Q. Chứng minh các đường thẳng MP,NQ,SO đồng qui.

Lời giải.

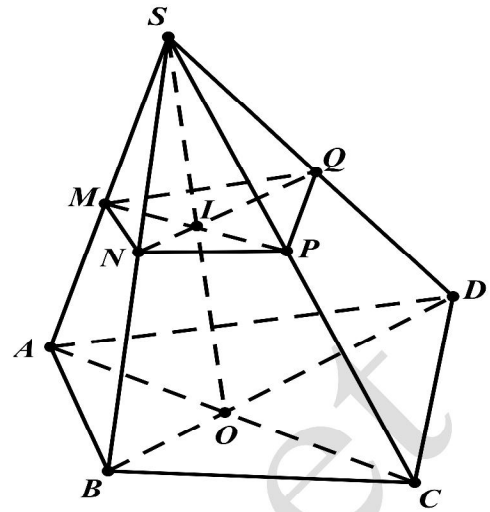
Trong mặt phẳng $(MNPQ)$ gọi $I = MP \cap NQ$.

Ta sẽ chứng minh $I \in SO$.

Dễ thấy $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

$$\begin{cases} I \in MP \subset (SAC) \\ I \in NQ \subset (SBD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in (SAC) \\ I \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in SO$$



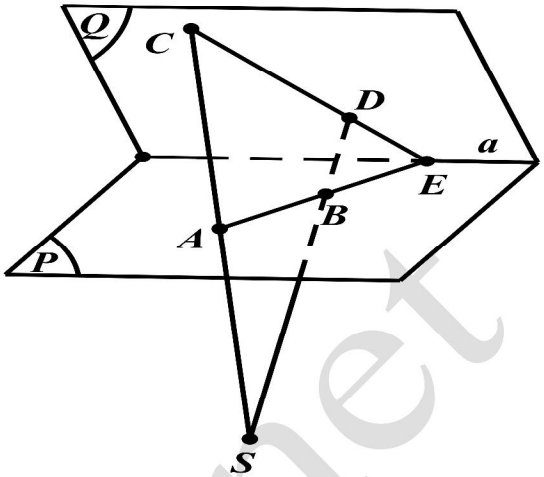
Vậy MP, NQ, SO đồng qui tại I.

Ví dụ 4. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng a. Trong (P) lấy hai điểm A, B nhưng không thuộc a và S là một điểm không thuộc (P). Các đường thẳng SA, SB cắt (Q) tương ứng tại các điểm C, D. Gọi E là giao điểm của AB và a.Chứng minh AB, CD và a đồng qui.

Lời giải.

Trước tiên ta có $S \notin AB$ vì ngược lại thì $S \in AB \subset (P) \Rightarrow S \in (P)$

(mâu thuẫn giả thiết) do đó S, A, B không thẳng hàng, vì vậy ta có mặt phẳng (SAB).



Do

$$C = SA \cap (Q) \Rightarrow \begin{cases} C \in SA \subset (SAB) \\ C \in (Q) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C \in (SAB) \\ C \in (Q) \end{cases} \quad (1)$$

Tương tự

$$D = SB \cap (Q) \Rightarrow \begin{cases} D \in SB \subset (SAB) \\ D \in (Q) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D \in (SAB) \\ D \in (Q) \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $CD = (SAB) \cap (Q)$.

Mà $E = AB \cap a \Rightarrow \begin{cases} E \in AB \subset (SAB) \\ E \in a \subset (Q) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E \in (SAB) \\ E \in (Q) \end{cases}$

$\Rightarrow E \in CD$.

Vậy AB, CD và a đồng qui đồng qui tại E.