Câu 31. Cho $a<b<c<d$ và $x=(a+b)(c+d)$, $y=(a+c)(b+d)$, $z=(a+d)(b+c)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x<y<z$. **B.** $y<x<z$. **C.** $z<x<y$. **D.** $x<z<y$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $x-y=(a+b)(c+d)-(a+c)(b+d)=a(c+d)+b(c+d)-a(b+d)-c(b+d)$

$=a(c-b)+bd-cd=(d-a)(b-c)<0$.

Suy ra: $x<y$.

Tương tự: $x-z=(a-c)(d-b)<0 \Rightarrow x<z$; $y-z=(a-b)(d-c)<0 \Rightarrow y<z$.

Câu 32. Với m, $n>0$, bất đẳng thức: $mn(m+n)<m^3+n^3$ tương đương với bất đẳng thức

A. $(m+n)(m^2+n^2)\ge 0$. **B.** $(m+n)(m^2+n^2+mn)\ge 0$.

C. $(m+n)(m-n)^2>0$. **D.** Tất cả đều sai.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$mn(m+n)<m^3+n^3 \Leftrightarrow m^2n-m^3+mn^2-n^3<0$

$\Leftrightarrow -m^2(m-n)+n^2(m-n)<0 \Leftrightarrow (m-n)^2(m+n)>0$.

Câu 33. Bất đẳng thức: $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ge a(b+c+d+e)$, $\forall\, a, b, c, d$ tương đương với bất đẳng thức nào sau đây?

A. $\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\left(a-\frac{c}{2}\right)^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)^2+\left(a-\frac{e}{2}\right)^2\ge 0$.

B. $\left(b-\frac{a}{2}\right)^2+\left(c-\frac{a}{2}\right)^2+\left(d-\frac{a}{2}\right)^2+\left(e-\frac{a}{2}\right)^2\ge 0$.

C. $\left(b+\frac{a}{2}\right)^2+\left(c+\frac{a}{2}\right)^2+\left(d+\frac{a}{2}\right)^2+\left(e+\frac{a}{2}\right)^2\ge 0$.

D. $(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(a-d)^2\ge 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ge a(b+c+d+e)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{4}-ab+b^2\right)+\left(\frac{a^2}{4}-ac+c^2\right)+\left(\frac{a^2}{4}-ad+d^2\right)+\left(\frac{a^2}{4}-ae+e^2\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow \left(b-\frac{a}{2}\right)^2+\left(c-\frac{a}{2}\right)^2+\left(d-\frac{a}{2}\right)^2+\left(e-\frac{a}{2}\right)^2\ge 0$.

Câu 34. Cho $x, y>0$. Tìm bất đẳng thức **sai**?

A. $(x+y)^2\ge 4xy$. **B.** $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{4}{x+y}$.

C. $\frac{1}{xy}\ge\frac{4}{(x+y)^2}$. **D.** $(x+y)^2\le 2(x^2+y^2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ge 4 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y$.

Câu 35. Cho $x^2+y^2=1$, gọi $S=x+y$. Khi đó ta có

A. $S \le \sqrt{2}$. **B.** $S \ge \sqrt{2}$. **C.** $-\sqrt{2} \le S \le \sqrt{2}$. **D.** $-1 \le S \le 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $1 = x^2 + y^2 \ge 2xy \Rightarrow 2xy \le 1$.

Mặt khác: $S^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \le 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \le S \le \sqrt{2}$.

Câu 36. Cho x, y là hai số thực thay đổi sao cho $x + y = 2$. Gọi $m = x^2 + y^2$. Khi đó ta có:

A. giá trị nhỏ nhất của m là 2. **B.** giá trị nhỏ nhất của m là 4.
C. giá trị lớn nhất của m là 2. **D.** giá trị lớn nhất của m là 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x$.

Do đó: $m = x^2 + y^2 = x^2 + (2-x)^2 = 2x^2 - 4x + 4 = 2(x-1)^2 + 2 \ge 2; \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của m là 2.

Câu 37. Với mỗi $x > 2$, trong các biểu thức: $\frac{2}{x}$, $\frac{2}{x+1}$, $\frac{2}{x-1}$, $\frac{x+1}{2}$, $\frac{x}{2}$ giá trị biểu thức nào là nhỏ nhất?

A. $\frac{2}{x}$. **B.** $\frac{2}{x+1}$. **C.** $\frac{2}{x-1}$. **D.** $\frac{x}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $\frac{2}{x+1} < \frac{2}{x} < \frac{2}{x-1}$ và $\frac{x}{2} < \frac{x+1}{2}$.

Mặt khác: $\frac{x}{2} - \frac{2}{x+1} = \frac{x^2 + x - 4}{2(x+1)} = \frac{(x-2)(x+2) + x}{2(x+1)} > 0; \forall x > 2 \Rightarrow \frac{x}{2} > \frac{2}{x+1}$.

Câu 38. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}$ với $x > 1$ là

A. 2. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1} = \frac{x-1}{2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{2} \ge 2\sqrt{\frac{x-1}{2} . \frac{2}{x-1}} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Vậy hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{5}{2}$.

Câu 39. Cho $x \ge 2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x}$ bằng

A. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $f(x) \ge 0$ và $\left[f(x)\right]^2 = \frac{x-2}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{8} - 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\right)^2 \le \frac{1}{8} \Rightarrow 0 \le f(x) \le \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Câu 40. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ với $x > 0$ là

A. 2. **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $f\left(x\right)=2x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{2x.\frac{1}{x}}=2\sqrt{2}$.

Vậy hàm số $f\left(x\right)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{2}$.

Câu 41. Với $a,b,c>0$. Biểu thức $P=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0<P\leq\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}<P$. **C.** $\frac{4}{3}\leq P$. **D.** $\frac{3}{2}\leq P$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $P+3=\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{x+y+z}$ suy ra: $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geq\frac{9}{2\left(a+b+c\right)}$.

Do đó $P+3\geq\frac{9}{2}\Rightarrow P\geq\frac{3}{2}$; đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.