✍ DẠNG 2. Viết phương trình đường cônic.

1. Phương pháp giải.

- Dựa vào các dạng của đường cônic mà giả thiết đã cho để viết phương trình
- Dựa vào định nghĩa của ba đường cônic

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho đường thẳng $\Delta : x - y + 1 = 0$ và điểm $F\left(1;0\right)$. Viết phương trình của đường cônic nhận F làm tiêu điểm và Δ là đường chuẩn trong mỗi trường hợp sau

a) Tâm sai $e = \sqrt{3}$ b) Tâm sai $e = \dfrac{1}{2}$ c) Tâm sai $e = 1$

Lời giải:

Gọi $M\left(x;y\right)$ là điểm thuộc đường cônic cần tìm. Khi đó theo định nghĩa ta có

$\dfrac{MF}{d\left(M;\Delta\right)} = e \Leftrightarrow MF = e.d\left(M;\Delta\right)$ (*).

Ta có $MF = \sqrt{\left(1-x\right)^2 + y^2}$, $d\left(M;\Delta\right) = \dfrac{\left|x-y+1\right|}{\sqrt{2}}$

a) Tâm sai $e = \sqrt{3}$ thì $\left(*\right) \Leftrightarrow \sqrt{\left(1-x\right)^2 + y^2} = \sqrt{3}.\dfrac{\left|x-y+1\right|}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 2\left(x^2 - 2x + 1 + y^2\right) = 3\left(x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y\right)$

$\Leftrightarrow 2x^2 + y^2 - 6xy + 10x - 6y + 1 = 0$

Vậy phương trình đường cônic cần tìm là

$2x^2 + y^2 - 6xy + 10x - 6y + 1 = 0$

b) Tâm sai $e = \dfrac{1}{2}$ thì $\left(*\right) \Leftrightarrow \sqrt{\left(1-x\right)^2 + y^2} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{\left|x-y+1\right|}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 4\left(x^2 - 2x + 1 + y^2\right) = x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 10x + 2y + 3 = 0$

Vậy phương trình đường cônic cần tìm là

$3x^2 + 3y^2 + 2xy - 10x + 2y + 3 = 0$.

c) Tâm sai $e = 1$ thì $\ast \ \Leftrightarrow \sqrt{\ 1 - x\ ^{2} + y^2} = \dfrac{|x - y + 1|}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y$

$\Leftrightarrow 2xy - 4x + 2y = 0$

Vậy phương trình đường cônic cần tìm là $2xy - 4x + 2y = 0$.

Ví dụ 2: Cho điểm $A\ \ 0;\sqrt{3}$ và hai đường thẳng $\Delta : x - 2 = 0$,

$\Delta' : 3x - y = 0$

a) Viết phương trình chính tắc đường elip có A là một đỉnh và một đường chuẩn là Δ

b) Viết phương trình chính tắc đường hypebol có Δ là một đường chuẩn và Δ' là tiệm cận.

Lời giải:

a) Gọi phương trình chính tắc elip là $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b > 0$

Vì $A\ \ 0;\sqrt{3}$ là một đỉnh của elip nên $b = \sqrt{3}$

elip có một đường chuẩn là Δ nên $\dfrac{a}{e} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{c} = 2 \Leftrightarrow a^2 = 2c$ (*)

Ta lại có $b^2 = a^2 - c \Rightarrow 3 = a^2 - c \Rightarrow c = a^2 - 3$ thay vào (*) ta có

$a^2 = 2\ \ a^2 - 3\ \ \Leftrightarrow a^2 = 6$

Vậy phương trình chính tắc elip cần tìm là $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{3} = 1$.

b) Gọi phương trình chính tắc elip là $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0$

Hypebol có một đường chuẩn là Δ nên $\dfrac{a}{e} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{c} = 2 \Leftrightarrow c = \dfrac{a^2}{2}$ (1)

Hypebol có một đường tiệm cận là Δ' nên $\dfrac{b}{a} = 3 \Leftrightarrow b = 3a$ (2)

Mặt khác $b^2 = c^2 - a^2$ (3)

Thay (1), (2) vào (3) ta được

$$3a\ ^{2} = \left(\frac{a^2}{2}\right)^2 - a^2 \Leftrightarrow 10a^2 = \frac{a^4}{4} \Leftrightarrow a^2\ \ 40 - a^2\ \ = 0 \Leftrightarrow a^2 = 40$$

Suy ra $b^2 = 9a^2 = 360$

Vậy phương trình chính tắc hypebol cần tìm là $\frac{x^2}{40} - \frac{y^2}{360} = 1$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.140. Cho đường thẳng $\Delta : x - 2y + 1 = 0$ và điểm $F\left(0;0\right)$. Viết phương trình của đường cônic nhận F làm tiêu điểm và Δ là đường chuẩn trong mỗi trường hợp sau

a) Tâm sai $e = \sqrt{2}$ b) Tâm sai $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$ c) Tâm sai $e = 1$

Bài 3.141. Cho điểm $A\left(3;0\right)$ và hai đường thẳng $\Delta : x - 3 = 0$, $\Delta' : 2x - y = 0$

a) Viết phương trình chính tắc đường elip có A là một đỉnh và một đường chuẩn là Δ

b) Viết phương trình chính tắc đường hypebol có Δ là một đường chuẩn và Δ' là tiệm cận.