III. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TỈ SỐ ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG.

1. Phương pháp.

Phân tích vectơ qua hai vectơ không cùng phương và sử dụng các kết quả sau:

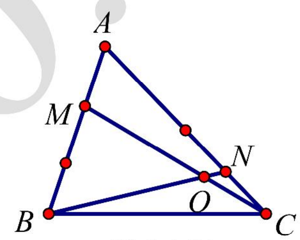
Cho $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ không cùng phương khi đó

- Với mọi vectơ $\vec{x}$ luôn tồn tại duy nhất các số thực m, n sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$
- $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow m = n = 0$
- Nếu $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}, \vec{c'} = m'\vec{a} + n'\vec{b}, m'.n' \neq 0$ và $\vec{c}, \vec{c'}$ là hai vectơ cùng phương thì $\dfrac{m}{m'} = \dfrac{n}{n'}$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC. Gọi M là điểm thuộc cạnh AB, N là điểm thuộc cạnh AC sao cho $AM = \dfrac{1}{3}AB,\ AN = \dfrac{3}{4}AC$. Gọi O là giao điểm của CM và BN.

Tính tỉ số $\dfrac{ON}{OB}$ và $\dfrac{OM}{OC}$



Hình 1.37

Lời giải (hình 1.37)

Giả sử $\overrightarrow{ON} = n\overrightarrow{BN}$; $\overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{CM}$

Ta có $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{AM} - m\overrightarrow{CM}$

$= \overrightarrow{AM} - m(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) = \dfrac{1}{3}(1-m)\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$;

Và $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{AN} - n\overrightarrow{BN}$

$= \overrightarrow{AN} - n(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB}) = \dfrac{3}{4}(1-n)\overrightarrow{AC} + n\overrightarrow{AB}$

Vì $\overrightarrow{AO}$ chỉ có một cách biểu diễn duy nhất qua $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ suy ra

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}(1-m) = n \\ \dfrac{3}{4}(1-n) = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{2}{3} \\ n = \dfrac{1}{9} \end{cases}.$$

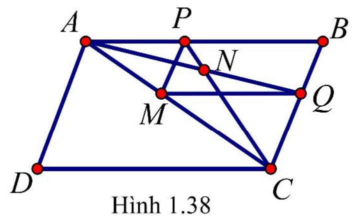
Vậy $\dfrac{ON}{OB} = \dfrac{1}{9}$ và $\dfrac{OM}{OC} = \dfrac{2}{3}$.

Ví dụ 2: Cho hình bình hành $ABCD$. M thuộc đường chéo AC sao cho $AM = kAC$. Trên các cạnh AB, BC lấy các điểm P, Q sao cho $MP//BC,\ MQ//AB$. Gọi N là giao điểm của AQ và CP.

Tính tỉ số $\dfrac{AN}{AQ}$ và $\dfrac{CN}{CP}$ theo k.

Lời giải (hình 1.38)

Đặt $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{CN} = y\overrightarrow{CP}$, ta có:



Hình 1.38

$$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{AQ}$$
$$= \overrightarrow{DA} + x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ})$$
$$= \overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC} + x\frac{BQ}{BC}\overrightarrow{BC}$$
$$= \overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC} - x\frac{BQ}{BC}\overrightarrow{DA}$$

Vì $MQ\,//\,AB \Rightarrow \dfrac{BQ}{BC} = \dfrac{AM}{AC} = k$ nên $\overrightarrow{DN} = (1-kx)\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC}$ (1)

Mặt khác $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{DC} + y\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{DC} + y(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BP})$

$$= \overrightarrow{DC} + y\overrightarrow{DA} + y\frac{BP}{BA}\overrightarrow{BA}$$

Vì $MP\,//\,BC \Rightarrow \dfrac{BP}{BA} = \dfrac{CM}{CA} = \dfrac{CA - AM}{CA} = 1 - k$ nên

$$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + y\overrightarrow{DA} - y(1-k)\overrightarrow{DC} = y\overrightarrow{DA} + (1 + ky - y)\overrightarrow{DC} \qquad (2)$$

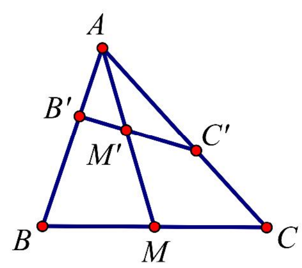
Từ (1) và (2) ta suy ra: $\begin{cases} y = 1 - kx \\ x = 1 + ky - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{k}{k^2 - k + 1} \\ y = \dfrac{1-k}{k^2 - k + 1} \end{cases}$.

Do đó $\dfrac{AN}{AQ} = \dfrac{k}{k^2 - k + 1}$ và $\dfrac{CN}{CP} = \dfrac{1-k}{k^2 - k + 1}$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Trên cạnh AB và AC lấy các điểm B' và C' . Gọi M' là giao điểm của B'C' và AM. Chứng minh: $\dfrac{AB}{AB'} + \dfrac{AC}{AC'} = 2\dfrac{AM}{AM'}$.

Lời giải (hình 1.39)

Đặt $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AB'}$; $\overrightarrow{AC} = y\overrightarrow{AC'}$; $\overrightarrow{AM} = z\overrightarrow{AM'}$



Hình 1.39

Vì $M' \in B'C' \Rightarrow \exists k : \overrightarrow{B'M'} = k\overrightarrow{B'C'}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM'} - \overrightarrow{AB'}) = k(\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB'})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM'} = (1-k)\overrightarrow{AB'} + k\overrightarrow{AC'}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{z}\overrightarrow{AM} = \dfrac{1-k}{x}\overrightarrow{AB} + \dfrac{k}{y}\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{z}\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \dfrac{1-k}{x}\overrightarrow{AB} + \dfrac{k}{y}\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2z} = \dfrac{1-k}{x} = \dfrac{k}{y} = \dfrac{1}{x+y} \Rightarrow x + y = 2z$

Hay $\dfrac{AB}{AB'} + \dfrac{AC}{AC'} = 2\dfrac{AM}{AM'}$ đpcm.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.122. Cho tam giác ABC, trên các cạnh AB, BC ta lấy các điểm M, N sao cho $\frac{AM}{MB}=\frac{2}{5};\ \frac{BN}{NC}=\frac{1}{3}$. Gọi I là giao điểm của AN và CM

Tính tỉ số $\frac{AI}{AN}$ và $\frac{CI}{IM}$

Bài 1.123: Cho tam giác ABC và trung tuyến AM. Một đường thẳng song song với AB cắt các đoạn thẳng AM, AC và BC lần lượt tại D, E và F. Một điểm G nằm trên cạnh AB sao cho FG song song AC.

Tính $\frac{ED}{GB}$

Bài 1.124: Cho ΔABC có $AB=3,\ AC=4$. Phân giác trong AD của góc BAC cắt trung tuyến BM tại I. Tính $\frac{AD}{AI}$

Bài 1.125: Cho tam giác ABC, trên cạnh AC lấy điểm M, trên cạnh BC lấy điểm N sao cho: $AM=3MC$, $NC=2NB$, gọi O là giao điểm của AN và BM. Tính diện tích ΔABC biết diện tích ΔOBN bằng 1.

Bài 1.126: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là nằm trên cạnh AB, CD sao cho $AB=3AM,\ CD=2CN$, G là trọng tâm tam giác MNB và AG cắt BC tại I. Tính $\frac{BI}{BC}$

Bài 1.127: Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O. Qua trung điểm M của AB dựng đường thẳng MO cắt CD tại N. Biết $OA=1, OB=2,\ OC=3,\ OD=4$, tính $\frac{CN}{ND}$.

Bài 1.128. Cho tam giác ABC. M là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $S_{ABC}=3S_{AMC}$. Một đường thẳng cắt các cạnh AB, AM, AC lần lượt tại B', M', C' phân biệt. Chứng minh rằng

$$\frac{AB}{AB'}+2\frac{AC}{AC'}=3\frac{AM}{AM'}$$

Bài 1.129: Trong đường tròn (O) với hai dây cung AB và CD cắt nhau tại M. Qua trung điểm S của BD kẻ SM cắt AC tại K. Chứng minh rằng $\frac{AM^2}{CM^2}=\frac{AK}{CK}$