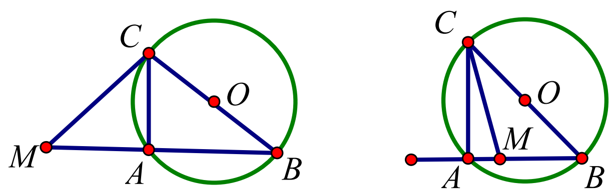
III. KHÁI NIỆM PHƯƠNG TÍCH CỦA MỘT ĐIỂM TỚI ĐƯỜNG TRÒN VÀ ỨNG DỤNG.

1. Phương pháp giải.

a) Bài toán: Cho đường tròn (O; R) và điểm M cố định. Một đường thẳng thay đổi đi qua M cắt đường tròn tại hai điểm A, B. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2$.

Chứng minh: Vẽ đường kính BC của đường tròn (O;R). Ta có $\overrightarrow{MA}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{MC}$ lên đường thẳng MB. Theo công thức hình chiếu ta có



Hình 2.14

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}\right).\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right)$$

$$= \left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OB}\right).\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right) = MO^2 - OB^2 = MO^2 - R^2.$$

Từ bài toán trên ta có định nghĩa sau:

b) Định nghĩa: Cho đường tròn (O; R) và điểm M cố định.

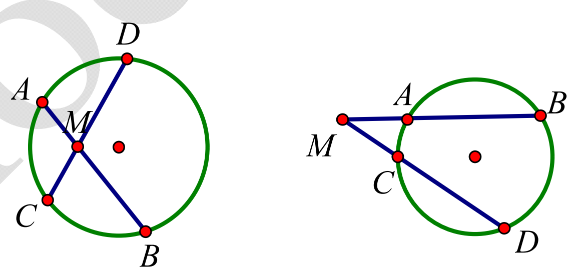
Một đường thẳng thay đổi đi qua M cắt đường tròn tại hai điểm A, B. Khi đó $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2$ là đại lượng không đổi được gọi là *phương tích* của điểm M đối với đường tròn (O;R), kí hiệu là $P_{M/(O)}$

Chú ý: Nếu M ở ngoài đường tròn, vẽ tiếp tuyến MT. Khi đó

$$P_{M/(O)} = MT^2 = MO^2 - R^2$$

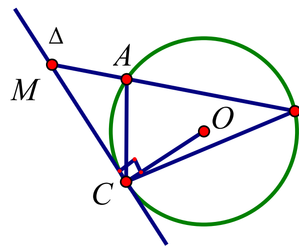
c) Các tính chất:

- Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M. Điều kiện cần và đủ để bốn điểm A, B, C, D nội tiếp được đường tròn là $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$ (hay $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}$).
- Cho đường AB cắt đường thẳng Δ ở M và điểm C trên đường thẳng $\Delta\ (C \neq M)$. Điều kiện cần và đủ để Δ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại C là $MA.MB = MC^2$.



Hình 2.15

Truy cập website: hoc360.net để tải tài liệu đề thi miễn phí

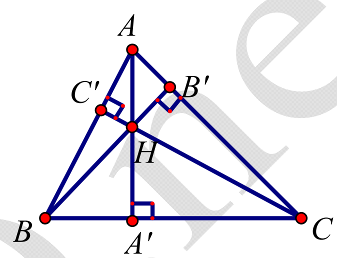


Hình 2.16

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AA', BB', CC' cắt nhau tại H. Chứng minh rằng $HA.HA' = HB.HB' = HC.HC'$

Lời giải(hình 2.17)



Hình 2.17

Ta có $\widehat{BB'C} = \widehat{BC'C} = 90^0$ suy ra tứ giác $BCB'C'$ nội tiếp trong đường tròn (C) đường kính BC. Do đó $HB.HB' = HC.HC'$ (vì cùng bằng phương tích từ điểm H tới đường tròn (C)) (1)

Tương tự tứ giác $ACA'C'$ nội tiếp được nên $HA.HA' = HC.HC'$ (2)

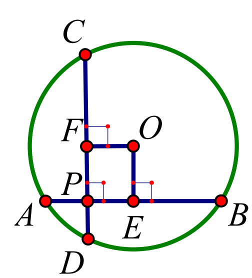
Từ (1) và (2) suy ra $HA.HA' = HB.HB' = HC.HC'$.

Ví dụ 2: Cho đường tròn (O;R) và một điểm P cố định ở bên trong đường tròn đó. Hai dây cung thay đổi AB và CD luôn đi qua điểm P và vuông góc với nhau.

a) Chứng minh rằng $AB^2 + CD^2$ không đổi.

b) Chứng minh rằng $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ không phụ thuộc vị trí điểm P.

Lời giải(hình 2.18)



Hình 2.18

a) Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD suy ra $OE \perp AB$ và $OF \perp CD$

Ta có $AB^2 + CD^2 = (2AE)^2 + (2CF)^2$

$= 4(AO^2 - OE^2) + 4(CO^2 - OF^2)$

$= 4[2R^2 - (OE^2 + OF^2)] = 4(2R^2 - OP^2)$

Suy ra $AB^2 + CD^2$ không đổi.

b)

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = (PA + PB)^2 + (PC + PD)^2 - 2PA.PB - 2PC.PD$$

$$= AB^2 + CD^2 + 2\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PD}$$

Mặt khác theo câu a) ta có $AB^2 + CD^2 = 4(2R^2 - OP^2)$ và

$$P_{P(O)} = \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PD} = PO^2 - R^2$$

Suy ra $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4(2R^2 - OP^2) + 4(PO^2 - R^2) = 4R^2$

Vậy $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ không phụ thuộc vị trí điểm P.

Ví dụ 3: Cho đường tròn đường kính AB và đường thẳng Δ vuông góc với AB ở H $(H \neq A, H \neq B)$. Một đường thẳng quay quanh H cắt đường tròn ở M, N và các đường thẳng AM, AN lần lượt cắt Δ ở M', N'.

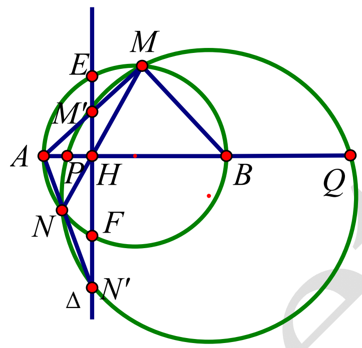
Group: https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/

a) Chứng minh rằng bốn điểm M, N, M', N' thuộc một đường tròn (C) nào đó.
b) Chứng minh rằng các đường tròn (C) luôn đi qua hai điểm cố định

Lời giải(hình 2.19)

a) Vì $\widehat{M'HB} = \widehat{M'MB} = 90^0$ nên tứ giác $BHM'M$ nội tiếp được suy ra $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM'}.\overrightarrow{AM}$ (1).

Tương tự Vì $\widehat{N'HB} = \widehat{N'NB} = 90^0$ nên tứ giác $HBN'N$ nội tiếp được suy ra $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN'}.\overrightarrow{AN}$ (2).



Hình 2.19

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AM'}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN'}.\overrightarrow{AN}$

Suy ra bốn điểm M, N, M', N' thuộc một đường tròn.

b) Gọi P, Q lần lượt là các giao điểm của đường tròn (C) với đường thẳng AB và E, F lần lượt là giao điểm của Δ với đường tròn đường kính AB.

Khi đó ta có $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}$

Mặt khác

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH}\right)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE}.\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}\right) = AE^2 \text{ và}$$

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FH}\right)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF}.\left(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB}\right) = AF^2$$

Suy ra $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AQ} = AE^2 = AF^2$

Do đó P, Q thuộc đường tròn (S) tiếp xúc với AE, AF ở E, F.

Vì (S) là đường tròn cố định nên P, Q cố định thuộc đường tròn (C).

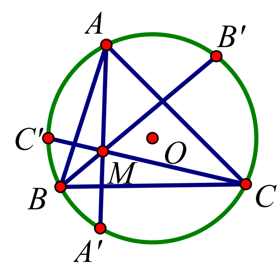
Ví dụ 4: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) bán kính R. Giả sử M là điểm di động trong đường tròn (O). Nối AM, BM, CM lần lượt cắt (O) tại A', B', C'. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'} = 3$.

Lời giải(hình 2.20)

Ta có ĐT $\Leftrightarrow \frac{MA^2}{MA'.MA} + \frac{MB^2}{MB'.MB} + \frac{MC^2}{MC'.MC} = 3$

$\Leftrightarrow -\frac{MA^2}{\overrightarrow{MA'}.\overrightarrow{MA}} - \frac{MB^2}{\overrightarrow{MB'}.\overrightarrow{MB}} - \frac{MC^2}{\overrightarrow{MC'}.\overrightarrow{MC}} = 3$ (*)

Mặt khác



Hình 2.20

$P_{M/(O)} = \overrightarrow{MA'}.\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB'}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC'}.\overrightarrow{MC} = MO^2 - R^2$ Suy ra

(*) $\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = -3\left(MO^2 - R^2\right)$ (1)

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, I là trung điểm GO. Ta có:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2$$

$$= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = -3\left(MO^2 - R^2\right)$

$\Leftrightarrow MG^2 + MO^2 = R^2 - \frac{1}{3}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IG})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IO})^2 = R^2 - \frac{1}{3}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

$\Leftrightarrow 2MI^2 + 2IO^2 = R^2 - \frac{1}{3}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{6}(GA^2 + GB^2 + GC^2) - IO^2$

$\Leftrightarrow MI = k$

Trong đó $k^2 = \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{6}(GA^2 + GB^2 + GC^2) - IO^2$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = k$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 2.126: Trong đường tròn tâm (O;R) cho hai dây cung AA' và BB' vuông góc với nhau tại S. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng $SM \perp A'B'$.

Bài 2.127: Cho hai đường tròn (O) và (O'); AA', BB' là các tiếp tuyến chung ngoài của chúng. đường thẳng AB' theo thứ tự cắt (O) và (O') tại M, N. Chứng minh rằng $AM = B'N$.

Bài 2.128: Cho tam giác ABC không cân tại A; AM, AD lần lượt là trung tuyến, phân giác của tam giác. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMD cắt AB, AC tại E, F. Chứng minh rằng $BE = CF$

Bài 2.129: Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B cố định. Một đường thẳng quay quanh A, cắt (O) tại M và N. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 2.130: Cho đường tròn (O;R) và điểm P cố định nằm trong đường tròn. Giả sử AB là dây cung thay đổi luôn đi qua P. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A, B cắt nhau tại C. Tìm tập hợp điểm C.

Bài 2.131: Cho đường tròn (O) đường kính AB, và điểm H cố định thuộc AB. Từ điểm K thay đổi trên tiếp tuyến tại B của (O), vẽ đường tròn (K; KH) cắt (O) tại C và D. Chứng minh rằng CD luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 2.132: Cho đường tròn đường kính AB, H là điểm nằm giữa AB và đường thẳng Δ vuông góc với AB tại H. Gọi E, F là giao điểm của đường tròn và Δ. Vẽ đường tròn tâm A, bán kính AE và đường tròn (C) bất kì qua H, B. Giả sử hai đường tròn đó cắt nhau tại M và N, chứng minh rằng AM và AN là hai tiếp tuyến của (C).

Bài 2.133: Cho hai đường tròn đồng tâm O là (C_1) và (C_2)((C_2) nằm trong (C_1)). Từ một điểm A nằm trên (C_1) kẻ tiếp tuyến AB tới (C_2). AB giao (C_1) lần thứ hai tại C. D là trung điểm của AB. Một đường thẳng qua A cắt (C_2) tại E, F sao cho đường trung trực của đoạn DF và EC giao nhau tại điểm M nằm trên AC. Tính $\frac{AM}{MC}$?

Bài 2.134: Cho đường tròn (O;R) và hai điểm P, Q cố định (P nằm ngoài (O), Q nằm trong (O)). Dây cung AB của (O) luôn đi qua Q. PA, PB lần lượt là giao (O) lần thứ hai tại D, C. Chứng minh rằng CD luôn đi qua điểm cố định.

Bài 2.135: Cho hai đường tròn không đồng tâm $(O_1;R_1)$ và $(O_2;R_2)$. Tìm tập hợp các điểm M có phương tích đối với hai đường tròn bằng nhau.