

✎ **DẠNG 2: Chứng minh đẳng thức vector.**

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh đẳng thức vector ta có các cách biến đổi: vế này thành vế kia, biến đổi tương đương, biến đổi hai vế cùng bằng một đại lượng trung gian. Trong quá trình biến đổi ta cần sử dụng linh hoạt ba quy tắc tính vector.

Lưu ý: Khi biến đổi cần phải *hướng đích*, chẳng hạn biến đổi vế phải, ta cần xem vế trái có đại lượng nào để từ đó liên tưởng đến kiến thức đã có để làm sao xuất hiện các đại lượng ở vế trái. Và ta thường biến đổi vế phức tạp về vế đơn giản hơn.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho năm điểm A, B, C, D, E . Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$

b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$

Lời giải

a) Biến đổi vế trái ta có

$$\begin{aligned} VT &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} = VP \quad \text{ĐPCM} \end{aligned}$$

b) Đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} &= \vec{0} \quad (\text{đúng}) \quad \text{ĐPCM.} \end{aligned}$$

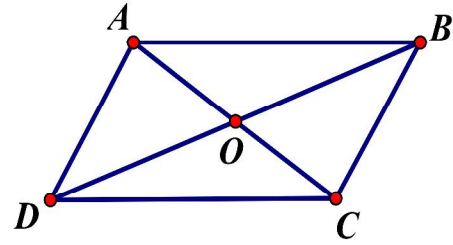
Ví dụ 2: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

- a) $\vec{BA} + \vec{DA} + \vec{AC} = \vec{0}$
 b) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$
 c) $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD}$.

Lời giải (Hình 1.12)

a) Ta có

$$\begin{aligned}\vec{BA} + \vec{DA} + \vec{AC} &= -\vec{AB} - \vec{AD} + \vec{AC} \\ &= -\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AC}\end{aligned}$$



Hình 1.12

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$ suy ra

$$\vec{BA} + \vec{DA} + \vec{AC} = -\vec{AC} + \vec{AC} = \vec{0}$$

b) Vì ABCD là hình bình hành nên ta có:

$$\vec{OA} = \vec{CO} \Rightarrow \vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AO} = \vec{0}$$

Tương tự: $\vec{OB} + \vec{OD} = \vec{0} \Rightarrow \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$.

c) Cách 1: Vì ABCD là hình bình hành nên

$$\vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow \vec{BA} + \vec{DC} = \vec{BA} + \vec{AB} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{BA} + \vec{MD} + \vec{DC}$$

$$= \vec{MB} + \vec{MD} + \vec{BA} + \vec{DC} = \vec{MB} + \vec{MD}$$

Cách 2: Đẳng thức tương đương với

$$\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{MD} - \vec{MC} \Leftrightarrow \vec{BA} = \vec{CD} \text{ (đúng do } ABCD \text{ là hình bình hành)}$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh rằng

a) $\vec{BM} + \vec{CN} + \vec{AP} = \vec{0}$

b) $\vec{AP} + \vec{AN} - \vec{AC} + \vec{BM} = \vec{0}$

c) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}$ với O là điểm bất kì.

Lời giải (Hình 1.13)

a) Vì PN, MN là đường trung bình của tam giác ABC nên

$PN \parallel BM, MN \parallel BP$ suy ra tứ giác $BMNP$ là hình bình hành

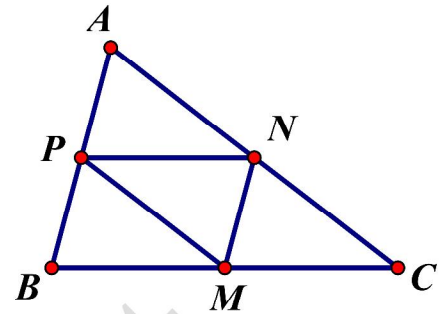
$$\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{PN}$$

N là trung điểm của $AC \Rightarrow \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NA}$

Do đó theo quy tắc ba điểm ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AP} \\ &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AP} = \vec{0} \end{aligned}$$

b) Vì tứ giác $APMN$ là hình bình hành nên theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$, kết hợp với quy tắc trừ



Hình 1.13

$$\Rightarrow \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM}$$

Mà $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ do M là trung điểm của BC .

Vậy $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.

c) Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NC} \\ &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC} \\ &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} \end{aligned}$$

Theo câu a) ta có $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$ suy ra

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}.$$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.19: Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CB}$

b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA}$

Bài 1.20: Cho các điểm A, B, C, D, E, F . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$$

Bài 1.21: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$

c) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MB}$

Bài 1.22: Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh rằng

a) $\vec{NA} + \vec{PB} + \vec{MC} = \vec{0}$

b) $\vec{MC} + \vec{BP} + \vec{NC} = \vec{BC}$

Bài 1.23: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh

A. Chứng minh rằng $\vec{B'B} + \vec{CC'} + \vec{D'D} = \vec{0}$

Bài 1.24: Cho ngũ giác đều $ABCDE$ tâm O. Chứng minh rằng

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OE} + \vec{OF} = \vec{0}$$

Bài 1.25: Cho hình bình hành $ABCD$. Dụng

$$\vec{AM} = \vec{BA}, \vec{MN} = \vec{DA}, \vec{NP} = \vec{DC}, \vec{PQ} = \vec{BC}.$$

Chứng minh rằng: $\vec{AQ} = \vec{0}$.