DẠNG 2: ***Chứng minh các đẳng thức về tích vô hướng hoặc độ dài của đoạn thẳng.***

1. Phương pháp giải.

- Nếu trong đẳng thức chứa bình phương độ dài của đoạn thẳng thì ta chuyển về vectơ nhờ đẳng thức $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$
- Sử dụng các tính chất của tích vô hướng, các quy tắc phép toán vectơ
- Sử dụng hằng đẳng thức vectơ về tích vô hướng.

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB và M là điểm tùy ý.

Chứng minh rằng : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = IM^2 - IA^2$

Lời giải:

Đẳng thức cần chứng minh được viết lại là $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{IM}^2 - \overrightarrow{IA}^2$

Để làm xuất hiện $\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IA}$ ở VP, sử dụng quy tắc ba điểm để xen điểm I vào ta được

$$VT = \ \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\ .\ \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\ =\ \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\ .\ \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}$$

$= \overrightarrow{IM}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = VP$ (đpcm)

Ví dụ 2: Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì. Chứng minh rằng:

$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = 0$ (*).

Từ đó suy ra một cách chứng minh định lí: "Ba đường cao trong tam giác đồng qui".

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{DA}.\ \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}\ + \overrightarrow{DB}.\ \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}\ + \overrightarrow{DC}.\ \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}$

$= \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA} = 0$

(đpcm)

Gọi H là giao của hai đường cao xuất phát từ đỉnh A, B.

Khi đó ta có $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0, \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$ (1)

Từ đẳng thức (*) ta cho điểm D trùng với điểm H ta được

$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$ (2)

Từ (1) (2) ta có $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} = 0$ suy ra BH vuông góc với AC

Hay ba đường cao trong tam giác đồng quy (đpcm).

Ví dụ 3: Cho nửa đường tròn đường kính AB. Có AC và BD là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BD} = AB^2$

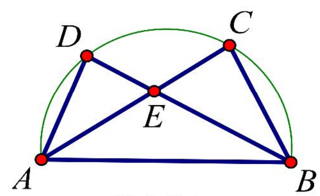
Lời giải (hình 2.4)

Ta có $VT = \overrightarrow{AE}.\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\ + \overrightarrow{BE}.\ \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$

$= \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD}$

Vì AB là đường kính nên $ADB = 90^0$, $ACB = 90^0$

Suy ra $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BC} = 0, \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD} = 0$



Hình 2.4

Do đó $VT = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}\right) = \overrightarrow{AB}^2 = VP$ (đpcm).

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và I là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc$

Lời giải:

Ta có: $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow \left(a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC}\right)^2 = 0$

$$\Rightarrow a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + 2ab\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} + 2bc\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} + 2ca\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA} = 0$$

$$\Rightarrow a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + ab\left(IA^2 + IB^2 - AB^2\right) +$$
$$+ bc\left(IB^2 + IC^2 - BC^2\right) + ca\left(IA^2 + IC^2 - CA^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(a^2 + ab + ca\right)IA^2 + \left(b^2 + ba + bc\right)IB^2 +$$
$$+ \left(c^2 + ca + cb\right)IC^2 - \left(abc^2 + ab^2c + a^2bc\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(a + b + c\right)\left(a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2\right) = \left(a + b + c\right)abc$$

$\Rightarrow a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 = abc$ (đpcm)

3. Bài tập luyện tập:

Bài 2.22. Cho tam giác ABC với ba trung tuyến AD, BE, CF.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF} = 0$.

Bài 2.23. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O và M là một điểm bất kì. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$

b) $MA^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO}$

Bài 2.24: Cho tam giác ABC có trực tâm H, M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}BC^2$.

Bài 2.25: Cho tam giác ABC có trọng tâm G và $BC = a,\ CA = b,\ AB = c$.

Chứng minh rằng: $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$

Bài 2.26: Cho bốn điểm A, B, C, D thỏa mãn $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0$.

Chứng minh rằng $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$

Bài 2.27: Cho tam giác ABC có ba đường cao là AA', BB', CC'. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng $\overrightarrow{A'M}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{B'N}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{C'P}.\overrightarrow{AB} = 0$

Bài 2.28. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là một điểm tùy ý.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

Bài 2.29: Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính $AB = 2R$. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AM và BN.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI},\ \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}$.

b) Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI}$ theo R.

Bài 2.30. Cho tam giác ABC, M là một điểm bất kỳ trên cạnh BC không trùng với B và C. Gọi a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, CA, AB.

Chứng minh rằng: $AM^2 = b^2BM^2 + c^2CM^2 + \left(b^2 + c^2 - a^2\right)BM.CM$

Bài 2.31. Cho lục giác $ABCDEF$ có AB vuông góc với EF và hai tam giác ACE và BDF có cùng trọng tâm. Chứng minh rằng $AB^2 + EF^2 = CD^2$.

Bài 2.32. Cho tam giác ABC cạnh a nội tiếp đường tròn (O).M là điểm bất kỳ nằm trên đường tròn (O). Chứng minh rằng $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$

Bài 2.33. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O, R). MN là một đường kính bất kỳ của đường tròn (O;R)

a) Chứng minh rằng $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 8R^2$

b) Chứng minh rằng $MA^4 + MB^4 + MC^4 + MD^4 = NA^4 + NB^4 + NC^4 + ND^4$.

Bài 2.34 : Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA} = \vec{0}$ khi và chỉ khi tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Bài 2.35: Cho lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ tâm I và đường tròn (O;R) bất kỳ chứa I. Các tia $IA_i, i = \overline{1,6}$ cắt (O) tại B_i ($i = \overline{1,6}$). Chứng minh rằng $IB_1^2 + IB_2^2 + IB_3^2 + IB_4^2 + IB_5^2 + IB_6^2 = 6R^2$

Bài 2.36. Tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng

a) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ với M là điểm bất kỳ

b) $a^2 + b^2 + c^2 \le 9R^2$

Bài 2.37: Cho tam giác ABC có $BAC < 90^0$, $BC = a, CA = b, AB = c$. M là điểm nằm trong tam giác ABC và nằm trên đường trên đường tròn đường kính BC. Gọi $x,\ y,\ z$ theo thứ tự là diện tích của các tam giác MBC, MCA, MAB. Chứng minh rằng

$$x - y + z \ \ c^2 + \ \ x - z + y \ \ b^2 = \left(x + y + z + \frac{2yz}{x}\right)a^2$$