DẠNG 3: Xác định điểm M thoả mãn một đẳng thức vectơ cho trước

1. Phương pháp giải.

- Ta biến đổi đẳng thức vectơ về dạng $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$ trong đó điểm A và $\vec{a}$ đã biết. Khi đó tồn tại duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$, để dựng điểm M ta lấy A làm gốc dựng một vectơ bằng vectơ $\vec{a}$ suy ra điểm ngọn vectơ này chính là điểm M.
- Ta biến đổi về đẳng thức vectơ đã biết của trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho hai điểm A, B phân biệt. Xác định điểm M biết $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

Lời giải (hình 1.21)

Hình 1.21

Ta có $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} - 3\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\ = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$

M nằm trên tia AB và $AM = 3AB$

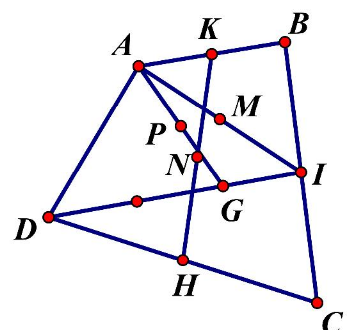
Ví dụ 2: Cho tứ giác $ABCD$. Xác định điểm M, N, P sao cho

a) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$

c) $3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}$

Lời giải (hình 1.22)



Hình 1.22

a) Gọi I là trung điểm BC suy ra $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$

Do đó $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MI} = \vec{0}$

Suy ra M là trung điểm AI

b) Gọi K, H lần lượt là trung điểm của AB, CD ta có

$\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{NK} + 2\overrightarrow{NH} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{NK} + \overrightarrow{NH} = \vec{0} \Leftrightarrow$ N là trung điểm của KH

c) Gọi G là trọng tâm tam giác BCD khi đó ta có $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 3\overrightarrow{PG}$

Suy ra $3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PG} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PG} = \vec{0} \Leftrightarrow P$ là trung điểm AG.

Ví dụ 3: Cho trước hai điểm A, B và hai số thực α, β thoả mãn $\alpha + \beta \neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thoả mãn $\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Từ đó, suy ra với điểm bất kì M thì $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MI}$.

Lời giải

Ta có: $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow\alpha\overrightarrow{IA}+\beta(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{AB}=\vec{0}.\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\overrightarrow{AI}=\beta\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}.$

Vì A, B cố định nên vectơ $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ không đổi, do đó tồn tại duy nhất điểm I thoả mãn điều kiện.

Từ đó suy ra

$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\alpha(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})+\beta(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$

$=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MI}+(\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB})=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MI}$ đpcm.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.40: Xác định điểm M biết $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Bài 1.41: Xác định các điểm I, J, K, L biết

$a)\ \overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

$b)\ \overrightarrow{JA}-\overrightarrow{JB}-2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

$c)\ \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{BC}$

$d)\ 2\overrightarrow{LA}-\overrightarrow{LB}+3\overrightarrow{LC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Bài 1.42: Cho tứ giác $ABCD$. Tìm điểm cố định I và hằng số k để hệ thức sau thỏa mãn với mọi M

$a)\ \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=k\overrightarrow{MI}$

$b)\ 2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}=k\overrightarrow{MI}$

$c)\ \overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}-4\overrightarrow{MD}=k\overrightarrow{MI}$

Bài 1.43: Cho tam giác ABC với các cạnh $AB=c,\ BC=a,\ CA=b$.

Tìm điểm M sao cho $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Bài 1.44: Cho tam giác ABC và ba số thức $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ không đồng thời bằng không. Chứng minh rằng:

a) Nếu $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ thì tồn tại duy nhất điểm M sao cho

$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$

b) Nếu $\alpha+\beta+\gamma=0$ thì không tồn tại điểm N sao cho $\alpha\overrightarrow{NA}+\beta\overrightarrow{NB}+\gamma\overrightarrow{NC}=\vec{0}$.

Bài 1.45: Cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ và n số $k_1,\ k_2, ..., k_n$ mà $k_1+k_2+...+k_n=k\neq 0$

a) Chứng minh rằng có duy nhất điểm G sao cho $k_1\overrightarrow{GA_1}+k_2\overrightarrow{GA_2}+...+k_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$.

Điểm G như thế gọi là *tâm tỉ cự của hệ điểm* A_i *gắn với hệ số* k_i. Trong trường hợp các hệ số k_i bằng nhau(ta có thể chọn các k_i đều bằng 1) thì G gọi là *trọng tâm của hệ điểm* A_i

b) Chứng minh rằng nếu G là tâm tỉ cự nói ở câu a) thì với điểm M bất kỳ ta có $\frac{1}{k}\ \ k_1\overrightarrow{MA_1}+k_2\overrightarrow{MA_2}+...+k_n\overrightarrow{MA_n}\ \ =\overrightarrow{OG}$

DẠNG 4: Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng các tính chất phép toán vectơ, ba quy tắc phép toán vectơ và tính chất trung điểm, trọng tâm trong tam giác.

2. Các ví dụ.

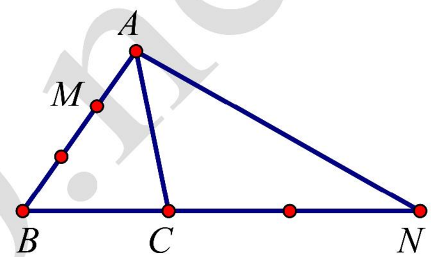
Ví dụ 1: Cho tam giác ABC. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB},\ \vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

a) Hãy dựng các điểm M, N thỏa mãn: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$

b) Hãy phân tích $\overrightarrow{CM},\ \overrightarrow{AN},\ \overrightarrow{MN}$ qua các véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

c) Gọi I là điểm thỏa: $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{CM}$. Chứng minh I, A, N thẳng hàng

Lời giải (hình 1.23)



Hình 1.23

a) Vì $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ suy ra M thuộc cạnh AB và $AM = \frac{1}{3}AB$; $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$, suy ra N thuộc tia BC và $CN = 2BC$.

b) Ta có: $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -2\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\vec{a} - 2\vec{a} + 3\vec{b} = -\frac{7}{3}\vec{a} + 3\vec{b}.$$

c) Ta có:

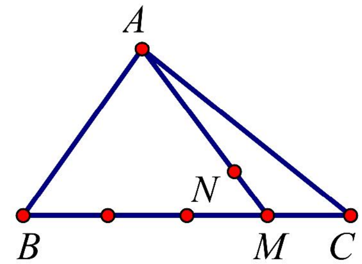
$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b} = -\frac{1}{3}(-2\vec{a} + 3\vec{b})$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AN} \Rightarrow$ A, I, N thẳng hàng.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC, trên cạnh BC lấy M sao cho $BM = 3CM$, trên đoạn AM lấy N sao cho $2AN = 5MN$. G là trọng tâm tam giác ABC.

a) Phân tích các vectơ $\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{BN}$ qua các véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

b) Phân tích các vectơ $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{MN}$ qua các véc tơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GB}$



Hình 1.24

Lời giải (hình 1.24)

a) Theo giả thiết ta có: $\overrightarrow{BM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AN}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AM}$

suy ra $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\ \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\ =\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AB}+\frac{5}{7}\overrightarrow{AM}$

$=-\overrightarrow{AB}+\frac{5}{7}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{23}{28}\overrightarrow{AB}+\frac{15}{28}\overrightarrow{AC}$

b) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ suy ra $\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}$

Ta có $\overrightarrow{MN}=-\frac{2}{7}\overrightarrow{AM}=-\frac{2}{7}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)$

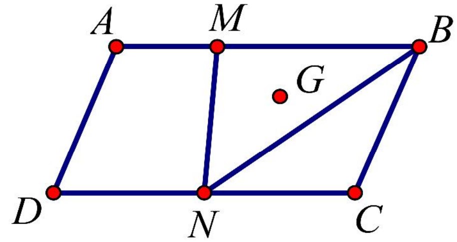
$=-\frac{1}{14}\ \overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}\ -\frac{3}{14}\ \overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GA}$

$=-\frac{1}{14}\ \overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}\ -\frac{3}{14}\ -\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}+\frac{1}{7}\overrightarrow{GB}$

Ví dụ 3: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AB và CD sao cho $AB=3AM$, $CD=2CN$ và G là trọng tâm tam giác MNB. Phân tích các vectơ $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AG}$ qua các véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

Lời giải (hình 1.25)



Hình 1.25

Ta có: $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$=-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Vì G là trọng tâm tam giác MNB nên

$$3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{AB}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

Suy ra $\overrightarrow{AG}=\frac{5}{18}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.46: Cho tam giác ABC .Lấy các điểm M,N,P sao cho $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$, $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$

a) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AM}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

b) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MN}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

Có nhận xét gì về ba điểm M, N, P thẳng hàng?

Bài 1.47: Cho tam giác ABC.Gọi I, J là hai điểm xác định bởi $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$, $3\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

a)Tính $\overrightarrow{IJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b)Đường thẳng IJ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC

Bài 1.48. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI=3BI$ và J là điểm trên BC kéo dài sao cho $5JB=2JC$.

a) Hãy phân tích $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Hãy phân tích $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$.

Bài 1.49: Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương. Tìm x sao cho

a) $\vec{u}=\vec{a}+\ 2x-1\ \vec{b}$ và $\vec{v}=x\vec{a}+\vec{b}$ cùng phương

b) $\vec{u}=3\vec{a}+x\vec{b}$ và $\vec{u}=\ 1-x\ \vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$ cùng hướng