

☞ **DẠNG 2: Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng.**

1. Phương pháp giải:

Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$

Ta xét hệ
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (I)$$

+ Hệ (I) vô nghiệm suy ra $d_1 // d_2$.

+ Hệ (I) vô số nghiệm suy ra $d_1 \equiv d_2$

+ Hệ (I) có nghiệm duy nhất suy ra d_1 và d_2 cắt nhau và nghiệm của hệ là tọa độ giao điểm.

Chú ý: Với trường hợp $a_2 \cdot b_2 \cdot c_2 \neq 0$ khi đó

+ Nếu $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ thì hai đường thẳng cắt nhau.

+ Nếu $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ thì hai đường thẳng song song nhau.

+ Nếu $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ thì hai đường thẳng trùng nhau.

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Xét vị trí tương đối các cặp đường thẳng sau

a) $\Delta_1 : x + y - 2 = 0$; $\Delta_2 : 2x + y - 3 = 0$

b) $\Delta_1 : -x - 2y + 5 = 0$; $\Delta_2 : 2x + 4y - 10 = 0$

c) $\Delta_1 : 2x - 3y + 5 = 0$; $\Delta_2 : x - 5 = 0$

d) $\Delta_1 : 2x + 3y + 4 = 0$; $\Delta_2 : -4x - 6y = 0$

Lời giải:

a) Ta có $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{1}$ suy ra Δ_1 cắt Δ_2

b) Ta có $\frac{-1}{2} = \frac{-2}{4} = \frac{5}{-10}$ suy ra Δ_1 trùng Δ_2

c) Ta có $\frac{1}{2} \neq \frac{0}{-3}$ suy ra Δ_1 cắt Δ_2

d) Ta có $\frac{-4}{2} = \frac{-6}{3} \neq \frac{0}{4}$ suy ra $\Delta_1 // \Delta_2$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có phương trình các đường thẳng AB, BC, CA là

$AB : 2x - y + 2 = 0$; $BC : 3x + 2y + 1 = 0$; $CA : 3x + y + 3 = 0$.

Xác định vị trí tương đối của đường cao kẻ từ đỉnh A và đường thẳng $\Delta : 3x - y - 2 = 0$

Lời giải

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ 3x + y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-1; 0)$

Ta xác định được hai điểm thuộc đường thẳng BC là $M(-1; 1)$, $N(1; -2)$

Đường cao kẻ từ đỉnh A vuông góc với BC nên nhận vector $\overrightarrow{MN}(2; -3)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình là $2x + 1 - 3y = 0$ hay $2x - 3y + 2 = 0$

Ta có $\frac{3}{2} \neq \frac{-1}{-3}$ suy ra hai đường thẳng cắt nhau.

Ví dụ 3: Cho hai đường thẳng $\Delta_1: (m-3)x + 2y + m^2 - 1 = 0$ và $\Delta_2: -x + my + (m-1)^2 = 0$.

a) Xác định vị trí tương đối và xác định giao điểm (nếu có) của Δ_1 và Δ_2 trong các trường hợp $m = 0$, $m = 1$

b) Tìm m để hai đường thẳng song song với nhau.

Lời giải:

a) Với $m = 0$ xét hệ $\begin{cases} -3x + 2y - 1 = 0 \\ -x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ suy ra Δ_1 cắt Δ_2 tại điểm có tọa độ $1; 2$

Với $m = 1$ xét hệ $\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ suy ra Δ_1 cắt Δ_2 tại gốc tọa độ

b) Với $m = 0$ hoặc $m = 1$ theo câu a hai đường thẳng cắt nhau nên không thỏa mãn. Với $m \neq 0$ và $m \neq 1$ hai đường thẳng song song khi và chỉ khi

$$\frac{m-3}{-1} = \frac{2}{m} \neq \frac{m^2-1}{m-1} \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy với $m = 2$ thì hai đường thẳng song song với nhau.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC, tìm tọa độ các đỉnh của tam giác trong trường hợp sau

a) Biết $A(2; 2)$ và hai đường cao có phương trình $d_1: x + y - 2 = 0$

$$; d_2: 9x - 3y + 4 = 0$$

b) Biết $A(4; -1)$, phương trình đường cao kẻ từ B là $\Delta: 2x - 3y = 0$; phương trình trung tuyến đi qua đỉnh C là $\Delta': 2x + 3y = 0$.

Lời giải

a) Tọa độ điểm A không là nghiệm của phương trình d_1, d_2 suy ra $A \notin d_1, A \notin d_2$ nên ta có thể giả sử $B \in d_1, C \in d_2$

Ta có AB đi qua A và vuông góc với d_2 nên nhận $\vec{u}(3; 9)$ làm VTPT nên có phương trình là $3(x-2) + 9(y-2) = 0$ hay $3x + 9y - 24 = 0$; AC đi qua A và vuông góc với d_1 nên nhận $\vec{v}(-1; 1)$ làm VTPT nên có phương trình là $-1(x-2) + 1(y-2) = 0$ hay $x - y = 0$

B là giao điểm của d_1 và AB suy ra tọa độ của B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 3x + 9y - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow B(-1; 3)$$

Tương tự tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 9x - 3y + 4 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

Vậy $A(2; 2)$, $B(-1; 3)$ và $C\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

b) Ta có AC đi qua $A(4; -1)$ và vuông góc với Δ nên nhận $\vec{u} = (3; 2)$ làm VTPT nên có phương trình là

$$3x - 4y + 2 = 0 \text{ hay } 3x + 2y - 10 = 0$$

Suy ra tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x + 2y - 10 = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow C(6; -4)$

Giả sử $B(x_B; y_B)$ suy ra trung điểm $I\left(\frac{x_B + 4}{2}; \frac{y_B - 1}{2}\right)$ của AB thuộc đường thẳng Δ' do đó

$$2 \cdot \frac{x_B + 4}{2} + 3 \cdot \frac{y_B - 1}{2} = 0 \text{ hay } 2x_B + 3y_B + 5 = 0 \quad (1)$$

Mặt khác $B \in \Delta$ suy ra $2x_B - 3y_B = 0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $B\left(-\frac{5}{4}; -\frac{5}{6}\right)$

Vậy $A(4; -1)$, $B\left(-\frac{5}{4}; -\frac{5}{6}\right)$ và $C(6; -4)$.

3. Bài tập luyện tập:

Bài 3.5: Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:

a) $d_1: x + y - 3 = 0$; $d_2: 2x + 2y = 0$

b) $d_1: -4x + 6y - 2 = 0$; $d_2: 2x - 3y + 1 = 0$

c) $d_1: 3x + 2y - 1 = 0$; $d_2: x + 3y - 4 = 0$

Bài 3.6: Cho hai đường thẳng $\Delta_1: 3x - y - 3 = 0$, $\Delta_2: x + y + 2 = 0$ và điểm $M(0; 2)$

a) Tìm tọa độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2 .

b) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và cắt Δ_1 và Δ_2 lần lượt tại A và B sao cho B là trung điểm của đoạn thẳng AM

Bài 3.7: Cho hai đường thẳng có phương trình:

$$\Delta_1: (a - b)x + y = 1; \quad \Delta_2: (a^2 - b^2)x + ay = b \text{ với } a^2 + b^2 \neq 0$$

a) Tìm quan hệ giữa a và b để Δ_1 và Δ_2 cắt nhau

b) Tìm điều kiện giữa a và b để Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tại điểm thuộc trục hoành.

Bài 3.8: Cho 2 đường thẳng $\Delta_1: kx - y + k = 0$; $\Delta_2: (1 - k^2)x + 2ky - 1 - k^2 = 0$.

Chứng minh rằng:

a) Đường thẳng Δ_1 luôn đi qua 1 điểm cố định với mọi k .

b) Δ_1 luôn cắt Δ_2 . Xác định tọa độ giao điểm của chúng.

Bài 3.9: Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : mx - y + 1 - m = 0$; $\Delta_2 : -x + my + 2 = 0$

Biện luận theo m vị trí tương đối của hai đường thẳng.

Bài 3.10: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho các điểm $A(0;1)$, $B(2;-1)$ và các đường thẳng

$d_1 : (m-1)x + (m-2)y + 2 - m = 0$, $d_2 : (2-m)x + (m-1)y + 3m - 5 = 0$

a) Chứng minh d_1 và d_2 luôn cắt nhau.

b) Gọi P là giao điểm của d_1 và d_2 . Tìm m sao cho $PA + PB$ lớn nhất.

Bài 3.11: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường thẳng

$\Delta_m : mx + y - m - 1 = 0$, $\Delta_{m'} : x - my - 3 - m = 0$, (với m là tham số thực). Chứng

minh rằng với mọi $m \in \mathbb{R}$ thì hai đường thẳng đó luôn cắt nhau tại 1 điểm nằm trên một đường tròn cố định.

Bài 3.12: Tam giác ABC biết $AB : 5x - 2y + 6 = 0$ và $AC : 4x + 7y - 21 = 0$ và $H(0;0)$ là trực tâm của tam giác. Tìm tọa độ điểm A, B .

Bài 3.13: Cho điểm $A(2;1)$ và đường thẳng $d : 3x - y + 3 = 0$. Tìm hình chiếu của A lên d .

Bài 3.14: Cho tam giác ABC biết $A(-4;6)$, $B(-1;2)$ và đường phân giác trong CK có phương trình là $3x + 9y - 22 = 0$. Tính tọa độ đỉnh C của tam giác.