➢ DẠNG TOÁN 3: HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP BẬC HAI .

1. Phương pháp giải.

Hệ phương trình đẳng cấp bậc hai là hệ phương trình có dạng: (I) $\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}$.

- Giải hệ khi $x = 0$ (hoặc $y = 0$).
- Khi $x \neq 0$, đặt $y = tx$. Thế vào hệ (I) ta được hệ theo k và x. Khử x ta tìm được phương trình bậc hai theo k. Giải phương trình này ta tìm được k, từ đó tìm được $(x;\ y)$.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2 + 6y^2 - 5xy = 0\ (1) \\ 4x^2 + 2xy + 6x = 27\ (2) \end{cases}$

Lời giải

Nếu $x = 0$ thay vào $(1) \Rightarrow y = 0$, thay vào (2) thấy $(x;y) = (0;0)$ là nghiệm của phương trình (2) nên không phải là nghiệm của hệ phương trình.

Nếu $x \neq 0$, đặt $y = tx$, thay vào hệ ta được $\begin{cases} x^2 + 6t^2y^2 - 5tx^2 = 0 \\ 4x^2 + 2tx^2 + 6x = 27 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2(1 + 6t^2 - 5t) = 0 \\ 4x^2 + 2tx^2 + 6x = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t^2 - 5t + 1 = 0\ (*) \\ 4x^2 + 2tx^2 + 6x = 27\ (**) \end{cases}$$

$(*) \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$ hoặc $t = \frac{1}{3}$

Với $t = \frac{1}{2}$ thay vào (**) ta được $4x^2 + x^2 + 6x = 27 \Leftrightarrow 5x^2 + 6x - 27 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \\ x = \frac{9}{5} \Rightarrow y = \frac{9}{10} \end{array} \right.$$

Với $t = \frac{1}{3}$ thay vào (**) ta được $4x^2 + \frac{2}{3}x^2 + 6x = 27 \Leftrightarrow 14x^2 + 18x - 81 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{9\left(1 + \sqrt{15}\right)}{14} \Rightarrow y = -\frac{3\left(1 + \sqrt{15}\right)}{14} \\ x = \frac{9\left(\sqrt{15} - 1\right)}{14} \Rightarrow y = \frac{3\left(\sqrt{15} - 1\right)}{14} \end{array} \right.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là

$$\left(-3;-\frac{3}{2}\right),\left(\frac{9}{5};\frac{9}{10}\right),\left(-\frac{9\left(1+\sqrt{15}\right)}{14};-\frac{3\left(1+\sqrt{15}\right)}{14}\right),\left(\frac{9\left(\sqrt{15}-1\right)}{14};\frac{3\left(\sqrt{15}-1\right)}{14}\right).$$

Ví dụ 2:Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 1 \\ 2x^2 - 3xy + 4y^2 = 3 \end{cases}$

Lời giải

Dễ thấy $x = 0$ không thoả hệ

Với $x \neq 0$, đặt $y = tx$, thay vào hệ ta được $\begin{cases} x^2(t^2 - t + 1) = 1 \ (*) \\ x^2(2t^2 - 3t + 4) = 3 \end{cases}$

Suy ra $3(t^2 - t + 1) = 2t^2 - 3t + 4 \Rightarrow t = \pm 1$

Thay vào (*) thì

Với $t = 1$, ta có $x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -1 \Rightarrow y = -1 \end{array}\right.$

Với $t = -1$ ta có $x^2 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right),\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right),(-1;-1)$ và $(1;1)$

Ví dụ 3: Với giá trị nào của m thì hệ: $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 + m \end{cases}$ có nghiệm

Lời giải

Dễ thấy $x = 0$ không thoả hệ

Với $x \neq 0$, đặt $y = tx$, thay vào hệ ta được

$$\begin{cases} x^2\left(3 + 2k + k^2\right) = 11 \quad (*) \\ x^2\left(1 + 2k + 3k^2\right) = 17 + m \end{cases}$$

Suy ra $(17 + m)\left(1 + 2k + k^2\right) = 11\left(1 + 2k + 3k^2\right)$.

$\Leftrightarrow (m - 16)k^2 + 2(m + 6)k + m + 6 = 0 \ (**)$

Ta có: $3 + 2k + k^2 = (k + 1)^2 + 2 > 0, \forall k \Rightarrow (*)$ luôn có nghiệm x với mọi k do đó hệ ban đầu có

nghiệm khi và chỉ khi phương trình (**) có nghiệm ẩn k .
Với $m = 16$: Phương trình (**) trở thành $44k + 88 = 0 \Leftrightarrow k = -2$. Vậy $m = 16$ thỏa mãn.
Với $m \neq 16$: Phương trình (**) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_k \geq 0$

$$\Leftrightarrow (m+6)^2 - (m-16)(m+6) \geq 0 \Leftrightarrow 22(m+6) \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -6$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq -6$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.59: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 3x^2 + 5xy - 4y^2 = 38 \\ 5x^2 - 9xy - 3y^2 = 15 \end{cases}$

Bài 3.60: Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 \end{cases}$

Bài 3.61: Cho hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = m \\ y^2 - 3xy = 4 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với $m = 1$
b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm