➢ DẠNG TOÁN 3: PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN TRONG CĂN BẬC HAI.

1. Phương pháp giải.

Để giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn ta tìm cách để khử dấu căn, bằng cách:

– Nâng luỹ thừa hai vế.

– Phân tích thành tích.

– Đặt ẩn phụ.

2. Các ví dụ minh họa.

Loại 1: Bình phương hai vế của phương trình.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x^2+2x+4}=\sqrt{2-x}$ b) $x-\sqrt{2x-5}=4$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $\begin{cases} x^2+2x+4\ge 0 \\ 2-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\le 2$

Với điều kiện đó phương trình tương đương với

$$x^2+2x+4=2-x \Leftrightarrow x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x=-1$ và $x=-2$.

b) ĐKXĐ: $2x-5\ge 0 \Leftrightarrow x\ge \frac{5}{2}$.

$x-\sqrt{2x-5}=4 \Leftrightarrow \sqrt{2x-5}=x-4$ (*)

TH1: Với $x-4<0 \Leftrightarrow x<4$ ta có $VT(*)\ge 0, VP(*)<0$ suy ra phương trình vô nghiệm

TH2: Với $x-4\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 4$ ta có hai vế không âm nên phương trình (*) tường đương với

$$2x-5=\left(x-4\right)^2 \Leftrightarrow x^2-10x+21=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=7 \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện $x\ge 4$ và điều kiện xác định suy ra chỉ có $x=7$ là nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm là $x=7$.

Nhận xét: Từ các lời giải các bài toán trên ta suy ra đối với các dạng phương trình sau ta có thể giải bằng cách thực hiện phép biến đổi tương đương:

- $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)\ge 0\ (hay\ g(x)\ge 0) \end{cases}$
- $\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=\left[g(x)\right]^2 \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau

a) $x=\sqrt{\sqrt{3x^2+1}-1}$ b) $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0$

Lời giải

a) Phương trình tương đương với

$$\begin{cases}x\ge 0\\ x^2=\sqrt{3x^2+1}-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ \sqrt{3x^2+1}=x^2+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ 3x^2+1=(x^2+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^4-x^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^2\left(x^2-1\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=0$ và $x=1$

b) Ta có $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0\Leftrightarrow\sqrt{2x-1}=-x^2+3x-1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+3x-1\ge 0\\ 2x-1=\left(-x^2+3x-1\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+3x-1\ge 0\\ (x-1)^2(x^2-4x+2)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+3x-1\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-4x+2=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+3x-1\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\pm\sqrt{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2-\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=1$ và $x=2-\sqrt{2}$

Ví dụ 3: Tìm m để phương trình $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1$ có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}\\ 3x^2+(4-m)x-1=0\quad(*)\end{cases}$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn hoặc bằng $-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=3x^2+(4-m)x-1$ trên $[-\dfrac{1}{2};+\infty)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

Xét hàm số $y=3x^2+(4-m)x-1$ trên $[-\dfrac{1}{2};+\infty)$. Ta có $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{m-4}{6}$

+ TH1: Nếu $\frac{m-4}{6} \le -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m \le 1$ thì hàm số đồng biến trên $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$ nên $m \le 1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ TH2: Nếu $\frac{m-4}{6} > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m > 1$:

Ta có bảng biến thiên

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{m-4}{6}$		$+\infty$
y	$y\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	$y\left(\frac{m-4}{6}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra đồ thị hàm số $y = 3x^2 + (4-m)x - 1$ trên $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow y\left(-\frac{1}{2}\right) \ge 0 > y\left(\frac{m-4}{6}\right) \Leftrightarrow \frac{2m-9}{4} \ge 0 > \frac{1}{12}\left(-m^2 + 8m - 28\right) \ (1)$$

Vì $-m^2 + 8m - 28 = -\left(m-4\right)^2 - 12 < 0, \ \forall m$ nên

$(1) \Leftrightarrow 2m - 9 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge \frac{9}{2}$ (thỏa mãn $m > 1$)

Vậy $m \ge \frac{9}{2}$ là giá trị cần tìm.

Loại 2: Phân tích thành tích bằng cách nhân liên hợp.

Để trục căn thức ta nhân với các đại lượng liên hợp;

$$\bullet \sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$$

$$\bullet \sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} = \frac{\left(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}\right)\left(\left(\sqrt[3]{A}\right)^2 + \sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B} + \left(\sqrt[3]{B}\right)^2\right)}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2 + \sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B} + \left(\sqrt[3]{B}\right)^2} = \frac{A-B}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2 + \sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B} + \left(\sqrt[3]{B}\right)^2}$$

Với A, B không đồng thời bằng không.

Ví dụ 4: Giải các phương trình sau

a) $\dfrac{2(x-1)^2}{\left(3-\sqrt{7+2x}\right)^2} = x+20$ b) $\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{x}=2$

c) $3\sqrt[3]{x}+\sqrt{x^2+8}=\sqrt{x^2+15}+2$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $\begin{cases} 7+2x \ge 0 \\ 3 \ne \sqrt{7+2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{7}{2} \\ x \ne 1 \end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{2(x-1)^2\left(3+\sqrt{7+2x}\right)^2}{\left(3-\sqrt{7+2x}\right)^2\left(3+\sqrt{7+2x}\right)^2} = x+20$

$\Leftrightarrow \dfrac{2(x-1)^2\left(10+2x+6\sqrt{7+2x}\right)}{(2-2x)^2} = x+20$

$\Leftrightarrow 10+2x+6\sqrt{7+2x} = 2(x+20)$

$\Leftrightarrow \sqrt{7+2x} = 5 \Leftrightarrow x = 9$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có ngjiệm $x=9$

b) ĐKXĐ: $x \ge \dfrac{2}{3}$

Nhẩm ta thấy $x=1$ là nghiệm của phương trình nên ta tách như sau

Phương trình $\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x-2}-1\right)+\left(\sqrt[3]{x}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(\sqrt{3x-2}-1\right)\left(\sqrt{3x-2}+1\right)}{\sqrt{3x-2}+1} + \dfrac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x-3}{\sqrt{3x-2}+1} + \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(\dfrac{3}{\sqrt{3x-2}+1} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\right) = 0\ (*)$

Do $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1 = \left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4} > 0$ nên $\dfrac{3}{\sqrt{3x-2}+1} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} > 0$

Phương trình $(*) \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

c) Phương trình được viết lại như sau: $3\sqrt[3]{x}-2 = \sqrt{x^2+15}-\sqrt{x^2+8}$

Vì $\sqrt{x^2+15}-\sqrt{x^2+8}>0$ nên phương trình có nghiệm thì phải thỏa mãn $3\sqrt[3]{x}-2$ hay $x>\frac{8}{27}$

Ta có phương trình tương đương với:

$3\sqrt[3]{x}-3=\sqrt{x^2+15}-4+3-\sqrt{x^2+8}$

$\Leftrightarrow 3\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+15}+4}-\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+8}+3}$

$\Leftrightarrow (x-1)(\frac{1}{\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1}+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3}-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4})=0$ (**)

Vì $x>\frac{8}{27}$ suy ra $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3}-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4}>0$ nên

$\frac{1}{\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1}+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3}-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4}>0$

Phương trình (**) $\Leftrightarrow x=1$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Ví dụ 5: Giải các phương trình sau

a) $(x+3)\sqrt{2x^2+1}=x^2+x+3$ b) $(3x+1)\sqrt{x^2+3}=3x^2+2x+3$

Lời giải

a) Ta thấy $x=-3$ không là nghiệm của phương trình

Xét $x\neq -3$, phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1}=\frac{x^2+x+3}{x+3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1}-1=\frac{x^2}{x+3} \Leftrightarrow \frac{2x^2}{\sqrt{2x^2+1}+1}=\frac{x^2}{x+3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2(x+3)=\sqrt{2x^2+1}+1 \ (*) \end{array}\right.$

Phương trình (*) $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1}=2x+5$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\frac{5}{2} \\ 2x^2+1=4x^2+25+20x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\frac{5}{2} \\ x^2+10x+12=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\frac{5}{2} \\ x=-5\pm\sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow x=5+\sqrt{13}$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=0$ và $x=-5+\sqrt{13}$

b) Ta thấy $x=-\frac{1}{3}$ không là nghiệm của phương trình

Xét $x \neq -\frac{1}{3}$, phương trình đã cho $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} = \frac{3x^2+2x+3}{3x+1}$

Đến đây, chú ý $3x^2+2x+3 = 3(x+\frac{1}{3})^2 + \frac{8}{3} > 0$

Nên phương trình có nghiệm phải thỏa mãn $x > -\frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{x^2+3}+2x > 0$

Do đó phương trình đã cho $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3}-2x = \frac{3x^2+2x+3}{3x+1} - 2x$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+3-4x^2}{\sqrt{x^2+3}+2x} = \frac{3x^2+2x+3-6x^2-2x}{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(1-x^2)}{\sqrt{x^2+3}+2x} = \frac{3(1-x^2)}{3x+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ \sqrt{x^2+3}+2x = 3x+1 \end{array}\right.$$

* TH1: $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Nhưng $x = -1$ không thoả mãn $x > -\frac{1}{3}$ nên phương trình có nghiệm $x = 1$

* TH2: $\sqrt{x^2+3}+2x = 3x+1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} = x+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+3 = x^2+1+2x \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Loại 3: Đặt ẩn phụ

Ví dụ 6: Giải các phương trình sau

a) $x^2 + \sqrt{x^2+11} = 31$ b) $(x+5)(2-x) = 3\sqrt{x^2+3x}$ c) $\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} = 3\sqrt{x}$

Lời giải

a) Đặt $t = \sqrt{x^2+11},\ t \geq 0$. Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 + t - 42 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 6 \\ t = -7 \end{array}\right.$$

Vì $t \geq 0 \Rightarrow t = 6$, thay vào ta có $\sqrt{x^2+11} = 6$

$x^2 + 11 = 36 \Leftrightarrow x = \pm 5$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \pm 5$

b) Phương trình $\Leftrightarrow x^2 + 3x + 3\sqrt{x^2+3x} - 10 = 0$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3x}, \quad t \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành

$t^2 + 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -5 \end{array}\right.$.

Vì $t \geq 0 \Rightarrow t = 2$, thay vào ta có $\sqrt{x^2 + 3x} = 2$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -4 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 1$ và $x = -4$.

c) ĐKXĐ: $x \geq 0$

Dễ thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình

Xét $x > 0$, phương trình $\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 3\sqrt{x}.\sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow x + 1 + \frac{1}{x} = 3\sqrt{x - 1 + \frac{1}{x}}$

Đặt $t = \sqrt{x - 1 + \frac{1}{x}}, \ t \geq 1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = t^2 + 1$

Phương trình trở thành $t^2 + 2 = 3t \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right.$

- Với $t = 1$ ta có $\sqrt{x - 1 + \frac{1}{x}} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = x \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn)
- Với $t = 2$ ta có $\sqrt{x - 1 + \frac{1}{x}} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$ và $x = 1$.

Nhận xét: Phương trình có dạng $af(x) + b\sqrt{f(x)} + c = 0$ ta đặt $\sqrt{f(x)} = t$.

Ví dụ 7: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{4x - 1} + 4x^2 - 6x + 1 = 0$

b) $\sqrt{3x^2 - 2x + 9} + \sqrt{3x^2 - 2x + 2} = 7$

c) $3\sqrt{x} + 8 = 9x + \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

d) $\frac{2x^2 + 8x + 1}{2x + 1} = 5\sqrt{x}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \geq \frac{1}{4}$

Đặt $t = \sqrt{4x - 1}, \ t \geq 0 \Rightarrow x = \frac{t^2 + 1}{4}$

Phương trình trở thành $t+4\left(\frac{t^2+1}{4}\right)^2-6\frac{t^2+1}{4}+1=0$

$\Leftrightarrow 4t+t^4+2t^2+1-6\left(t^2+1\right)+4=0$

$\Leftrightarrow t^4-4t^2+4t-1=0 \Leftrightarrow (t-1)\left(t^3+t^2-3t+1\right)=0$

$\Leftrightarrow (t-1)^2\left(t^2+2t-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$ (loại $t=-1-\sqrt{2}$)

Với $t=1$ ta có $1=\sqrt{4x-1} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Với $t=-1+\sqrt{2}$ ta có $-1+\sqrt{2}=\sqrt{4x-1} \Leftrightarrow 4x-1=3-2\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=\frac{1}{2}$ và $x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

b) Đặt $t=\sqrt{3x^2-2x+2}$, điều kiện $t\geq 0$. Khi đó $\sqrt{3x^2-2x+9}=\sqrt{t^2+7}$.

Phương trình trở thành $\sqrt{t^2+7}+t=7$

$\Leftrightarrow \sqrt{t^2+7}=7-t \Leftrightarrow \begin{cases} t\leq 7 \\ t^2+7=t^2-14t+49 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t\leq 7 \\ t=3 \end{cases} \Leftrightarrow t=3$

Với $t=3$ ta có $\sqrt{3x^2-2x+2}=3$

$\Leftrightarrow 3x^2-2x+2=9 \Leftrightarrow 3x^2-2x-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1+\sqrt{22}}{3} \\ x=\frac{1-\sqrt{22}}{3} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=\frac{1\pm\sqrt{22}}{3}$.

c) ĐKXĐ: $x>0$.

Phương trình tương đương với

$3\left(\sqrt{x}-\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)+8=9(x+\frac{1}{9x})$.

Đặt $t = \sqrt{x} - \dfrac{1}{3\sqrt{x}} \Rightarrow t^2 = x + \dfrac{1}{9x} - \dfrac{2}{3} \Rightarrow x + \dfrac{1}{9x} = t^2 + \dfrac{2}{3}$

Phương trình trở thành:

$$3t + 8 = 9\left(t^2 + \frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow 9t^2 - 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{2}{3} \\ t = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Với $t = \dfrac{2}{3}$ ta có $\sqrt{x} - \dfrac{1}{3\sqrt{x}} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 3x - 2\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{x} = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1$

Với $t = -\dfrac{1}{3}$ ta có $\sqrt{x} - \dfrac{1}{3\sqrt{x}} = -\dfrac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow 3x + \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = \dfrac{-1 + \sqrt{13}}{6} \\ \sqrt{x} = \dfrac{-1 - \sqrt{13}}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{7 - \sqrt{13}}{18}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 1$ và $x = \dfrac{7 - \sqrt{13}}{18}$.

d) ĐK: $x \ge 0$.

Dễ thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

Xét $x \ne 0$. Khi đó phương trình tương đương với

$$10x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} = 2x^2 + 1 + 8x \Leftrightarrow 5(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}) = 2(x + \frac{1}{4x}) + 4$$

Đặt $t = \sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \ge 2\sqrt{\sqrt{x}.\dfrac{1}{2\sqrt{x}}} = \sqrt{2} \Rightarrow t \ge \sqrt{2}$

Suy ra $x + \dfrac{1}{4x} = t^2 - 1$. Phương trình trở thành:

$5t = 2(t^2 - 1) + 4 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ (thỏa mãn) hoặc $t = \dfrac{1}{2}$ (loại)

Với $t = 2$ ta có $x + \dfrac{1}{4x} = 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm 2\sqrt{2}}{2}$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{3\pm 2\sqrt{2}}{2}$

Nhận xét: Phương trình có chứa $af\left(x\right)\pm\dfrac{1}{bf\left(x\right)}$ và $a^2f^2\left(x\right)+\dfrac{1}{b^2f^2\left(x\right)}$ thì ta đặt ẩn phụ là $t=af\left(x\right)\pm\dfrac{1}{bf\left(x\right)}$

Ví dụ 8: Giải phương trình

a) $\left(x+1\right)^2-2\sqrt{2x(x^2+1)}=0$

b) $10\sqrt{x^3+1}=3(x^2+2)$

c) $4+\sqrt{x+1}=3\sqrt{x^2-1}+2\sqrt{x-1}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $2x\left(x^2+1\right)\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0$

Đặt $\sqrt{2x}=a,\sqrt{x^2+1}=b;\ a\geq 0,b\geq 0$

Suy ra $a^2+b^2=2x+x^2+1=\left(x+1\right)^2$

Phương trình trở thành $a^2+b^2-2ab=0\Leftrightarrow\left(a-b\right)^2=0\Leftrightarrow a=b$

Suy ra $\sqrt{2x}=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow 2x=x^2+1\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2=0\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=1$

b) ĐKXĐ: $x^3+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -1$.

Phương trình $\Leftrightarrow 10\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}=3(x^2+2)$

Đặt $\sqrt{x+1}=a$, $\sqrt{x^2-x+1}=b$, $a\geq 0$, $b\geq 0$

Suy ra $a^2+b^2=x^2+2$ khi đó

Phương trình trở thành

$10ab=3\left(a^2+b^2\right)\Leftrightarrow 3a^2-10ab+3b^2=0$

$\Leftrightarrow\left(3a-b\right)\left(a-3b\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3a=b\\a=3b\end{array}\right.$

Với $3a=b$ ta có $3\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x+1}\Leftrightarrow 9\left(x+1\right)=x^2-x+1$

$\Leftrightarrow x^2-10x-8=0\Leftrightarrow x=5\pm\sqrt{33}$ (thỏa mãn điều kiện)

Với $a=3b$ ta có $\sqrt{x+1}=3\sqrt{x^2-x+1}\Leftrightarrow x+1=9\left(x^2-x+1\right)$

$\Leftrightarrow 9x^2-10x+8=0$ (phương trình vô nghiệm)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 5 \pm \sqrt{33}$.

c) ĐKXĐ: $x \geq 1$

Đặt $\sqrt{x+1} = a, \sqrt{x-1} = b;\ a \geq 0, b \geq 0$

Phương trình trở thành $4 + a = 3ab + 2b$

Mặt khác $a^2 + b^2 = 2$ suy ra $2\left(a^2 + b^2\right) + a = 3ab + 2b \Leftrightarrow \left(a - 2b\right)\left(2a + b + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow a = 2b$ (do $2a + b + 1 > 0$)

Suy ra $\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x + 1 = 4\left(x - 1\right) \Rightarrow x = \dfrac{5}{3}$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{5}{3}$.

Ví dụ 9: Tìm m để phương trình sau có nghiệm

a) $\left(2x-1\right)^2 + m = \sqrt{x^2 - x + 1}$ (1)

b) $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2 - 1}$ (2)

Lời giải

a) Đặt $t = \sqrt{x^2 - x + 1}$

$\Rightarrow t^2 = x^2 - x + 1 \Rightarrow \left(2x - 1\right)^2 = 4x^2 - 4x + 1 = 4t^2 - 3$

Vì $x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \geq \dfrac{3}{4}$ nên $t \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Phương trình (1) trở thành $4t^2 - 3 + m = t \Leftrightarrow -4t^2 + t + 3 = m$ (1')

Xét hàm số $y = -4t^2 + t - 3$ với $t \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Ta có $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{8} < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Bảng biến thiên

x	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
y	$\dfrac{-12+\sqrt{3}}{2}$ $\searrow$	$-\infty$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (1') có nghiệm $t \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = -4t^2 + t - 3$ trên $[\dfrac{\sqrt{3}}{2};+\infty)$ cắt đường thẳng $y = m \Leftrightarrow m \leq \dfrac{-12+\sqrt{3}}{2}$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $m \leq \dfrac{-12+\sqrt{3}}{2}$

b) ĐKXĐ: $x \geq 1$.

Chia cả hai vế cho $\sqrt{x+1}$ ta có

$(2) \Leftrightarrow 3\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} + m = 2\dfrac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow -3\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} + 2\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}} = m$

Đặt $t = \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}} = \sqrt[4]{1-\dfrac{2}{x+1}} \Rightarrow 0 \leq t < 1$

Phương trình (2) trở thành $-3t^2 + 2t = m$ (2')

Xét hàm số $y = -3t^2 + 2t$ trên $[0;1)$, ta có $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{3}$, $y\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{1}{3}$	1
y	0 ↗	$\frac{1}{3}$	↘ -1

Phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2') có nghiệm $t \in [0;1)$

$\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = -3t^2 + 2t$ trên $[0;1)$ cắt đường thẳng $y = m \Leftrightarrow -1 < m \leq \dfrac{1}{3}$

Vậy phương trình (2) có nghiệm khi và chỉ khi $-1 < m \leq \dfrac{1}{3}$

Lưu ý: Khi giải bài toán bằng cách đặt ẩn phụ , đối với loại toán không chứa tham số thì có thể không nêu điều kiện(hoặc điều kiện "lỏng") của ẩn phụ vì sau khi tìm được nghiệm ẩn phụ rồi chúng ta phải thay lại để giải. Nhưng với bài toán chứa tham số thì chúng ta ***cần phải*** nêu điều kiện "chặt" đối với ẩn phụ.

Loại 4: Đặt ẩn phụ không hoàn toàn

Ví dụ 10: Giải phương trình $3\sqrt{x+3} = 3x^2 + 4x - 1$

Lời giải

ĐKXĐ: $x \geq -3$

Phương trình $\Leftrightarrow -27(x+3) - 3\sqrt{x+3} + 3x^2 + 31x + 80 = 0$

Đặt $t = \sqrt{x+3}$ $\quad (t \geq 0)$ phương trình trở thành $-27t^2 - 3t + 3x^2 + 31x + 80 = 0$

Có $\Delta_t = (18x+93)^2$ suy ra $t_1 = \dfrac{-3x-16}{9}$ $\quad ,t_2 = \dfrac{x+5}{3}$

- $\sqrt{x+3} = \dfrac{-3x-16}{9}$ Vô nghiệm vì với $x \geq -3$ thì $\dfrac{-3x-16}{9} < 0$
- $\sqrt{x+3} = \dfrac{x+5}{3} \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -2$

Vậy phương trình ban đầu có hai nghiệm $x = 1$ và $x = -2$

Nhận xét: Trong lời giải trên ta thấy khó nhất là biến đổi phương trình ban đầu thành $-27(x+3) - 3\sqrt{x+3} + 3x^2 + 31x + 80 = 0$ để sau khi đặt ẩn phụ $t = \sqrt{x+3}$ thì phương trình ẩn t có $\Delta = (18x+93)^2$ (là bình phương của một nhị thức)

Nếu ta tách không hợp lý thì Δ không là bình phương của một nhị thức hoặc là một hằng số ,trong trường hợp đó việc giải phương trình theo hướng trên là không thể thực hiện được.

Vậy làm thế nào để tách được phương trình mà thỏa mãn các điều kiện trên và việc tách ra như thế có là duy nhất?.Để trả lời được câu hỏi này ta thực hiện theo các bước như sau:

B1: Viết (1) $\Leftrightarrow m(x+3) - 3\sqrt{x+3} + 3x^2 + (4-m)x - 1 - 3m = 0 \quad (m \neq 0)$

B2: Đặt $t = \sqrt{x+3}$ $\quad (t \geq 0)$ pt trở thành $mt^2 - 3t + 3x^2 + (4-m)x - 1 - 3m = 0$

Có $\Delta_t = -12mx^2 - 4m(4-m)x + 12m^2 + 4m + 9 = f(x)$

B3: Tìm m sao cho $\begin{cases} -12m > 0 \\ \Delta_f' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12m > 0 \\ \Delta_f' = 4m(m+27)(m^2+m+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -27$

Đến đây việc giải pt như đã trình bày ở trên

Ví dụ 11: Giải phương trình $\sqrt{60 - 24x - 5x^2} = x^2 + 5x - 10$

Lời giải

ĐKXĐ: $60 - 24x - 5x^2 \geq 0$

Đặt $t = \sqrt{60 - 24x - 5x^2}$ $\quad (t \geq 0)$ pt trở thành $\dfrac{1}{6}t^2 + t - \dfrac{1}{6}x^2 - x = 0 \Leftrightarrow t^2 + 6t - x^2 - 6x = 0$

Phương trình ẩn t này có $\Delta' = (x+3)^2$ nên ta tìm được $t_1 = x, t_2 = -x - 6$

- $\sqrt{60 - 24x - 5x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 4x - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2 + \sqrt{14}$

• $\sqrt{60-24x-5x^2}=-x-6 \Leftrightarrow \begin{cases} -x-6\ge 0 \\ x^2+6x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-3-\sqrt{13}$

Vậy pt ban đầu có hai nghiệm $x_1=-2-\sqrt{14}, x_2=-3-\sqrt{13}$

Ví dụ 12: Giải phương trình $(x+3)\sqrt{(4-x)(12+x)}=28-x$

Lời giải

ĐKXĐ: $-x^2-8x+48\ge 0$

$t=\sqrt{-x^2-8x+48}\quad (t\ge 0)$ phương trình trở thành

$\frac{-1}{2}t^2+(x+3)t+\frac{-1}{2}x^2-3x-4=0\quad (t\ge 0)$

Phương trình bậc hai ẩn t có $\Delta_t=1$ từ đó có $t=x+2, t=x+4$

•$\sqrt{-x^2-8x+48}=x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2\ge 0 \\ x^2+6x-22=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-3+\sqrt{31}$

•$\sqrt{-x^2-8x+48}=x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+4\ge 0 \\ x^2+8x-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-4+4\sqrt{2}$

Vậy pt ban đầu có hai nghiệm $x_1=-3+\sqrt{31}, x_2=-4+4\sqrt{2}$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.33: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{2x+1}=3x+1$

b) $\sqrt{x^3-x}=\sqrt{4x+4}$

c) $\sqrt{x^4+3x+1}=\sqrt{x^4-x^2-1}$

d) $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1$

e) $2\sqrt{x+3}=9x^2-x-4$

f) $x^2+\sqrt{x+7}=7$

Bài 3.34: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$

b) $3\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x^2+8}-2=\sqrt{x^2+15}$

c) $\sqrt{5x-1}+\sqrt[3]{9-x}=2x^2+3x-1$

d) $\sqrt[3]{x+6}+x^2=7-\sqrt{x-1}$

Bài 3.35: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x^2+x+2}=x^2+x$

b) $(2x-1)^2=\sqrt{x^2-x+1}$

c) $13x+2(3x+2)\sqrt{x+3}+42=0$

d) $x^2-2x-22-\sqrt{-x^2+2x+24}=0$

e) $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}}=x-\frac{1}{2}$

f) $\sqrt{4x-1}+4x^2-6x+1=0$

g) $x^2 + 2x\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 3x + 1$

h) $x^2 + \sqrt[3]{x^4 - x^2} = 2x + 1$

Bài 3.36: Giải các phương trình sau

a) $4x^2 + 22 + \sqrt{3x - 2} = 21x$

b) $x\left(1 - 5\sqrt{x + 3}\right) = 3\left(x^2 - 4\right)$

c) $51\sqrt{x - 2} = 3x^2 - 58x + 110$

d) $x^2 + x\sqrt{3x - 1} + 2 = 6x$

Bài 3.37: Giải phương trình $x + \sqrt{x^2 - 9} = \frac{2(x + 3)}{(x - 3)^2}$.

Bài 3.38: Giải phương trình $\sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2}$