➢ DẠNG TOÁN 2: GIẢI VÀ BIỆN LUẬN HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng định thức: Tính D, D_x, D_y

- Nếu $D \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\dfrac{D_x}{D}; \dfrac{D_y}{D}\right)$
- Nếu $D = 0$ thì ta xét D_x, D_y

Với $\left[\begin{array}{l} D_x \neq 0 \\ D_y \neq 0 \end{array}\right.$ khi đó phương trình vô nghiệm

Với $D_x = D_y = 0$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm tập nghiệm của hệ phương trình là tập nghiệm của một trong hai phương trình có trong hệ.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải và biện luận hệ phương trình: $\begin{cases} mx - y = 2m \\ 4x - my = m + 6 \end{cases}$

Lời giải

Ta có $D = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 4 & -m \end{vmatrix} = 4 - m^2 = (2-m)(2+m)$

$D_x = \begin{vmatrix} 2m & -1 \\ m+6 & -m \end{vmatrix} = -2m^2 + m + 6 = (2-m)(2m+3)$

$D_y = \begin{vmatrix} m & 2m \\ 4 & m+6 \end{vmatrix} = m^2 - 2m = m(m-2)$

- Với $\mathrm{D} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq -2 \end{cases}$: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất

  $(x;y) = \left(\dfrac{D_x}{D}; \dfrac{D_y}{D}\right) = \left(\dfrac{2m+3}{2+m}; -\dfrac{m}{2m+1}\right)$

- Với $\mathrm{D}=0 \Leftrightarrow m = \pm 2$:

+ Khi $m = 2$ ta có $\mathrm{D} = D_x = D_y = 0$ nên hệ phương trình có nghiệm là nghiệm của phương trình $2x - y = 4 \Leftrightarrow y = 2x - 4$. Do đó hệ phương trình có nghiệm là $(x;y) = (t; 2t-4)$, $t \in R$.

+ Khi $m = -2$ ta có $D = 0, D_x \neq 0$ nên hệ phương trình vô nghiệm

Kết luận

$m \neq 2$ và $m \neq -2$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\dfrac{2m+3}{2+m}; -\dfrac{m}{2m+1}\right)$

$m=2$ hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(t;2t-4)$, $t\in R$.

$m=-2$ hệ phương trình vô nghiệm

Ví dụ 2: Giải và biện luận hệ phương trình sau: $\begin{cases} a(x-1)+by=1 \\ b(x-1)+ay=1 \end{cases}$

Lời giải

Hệ tương đương: $\begin{cases} ax-a+by=1 \\ bx-b+ay=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by=a+1 \\ bx+ay=b+1 \end{cases}$

Ta có: $D=\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$D_x=\begin{vmatrix} a+1 & b \\ b+1 & a \end{vmatrix}=(a-b)(a+b+1),\ D_y=\begin{vmatrix} a & a+1 \\ b & b+1 \end{vmatrix}=a-b$

- TH1: Với $D\neq 0 \Leftrightarrow a^2-b^2\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq b \\ a\neq -b \end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ là $x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{(a-b)(a+b+1)}{(a-b)(a+b)};\ y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{1}{a+b}$

- TH2: Với $D=0 \Leftrightarrow a^2-b^2=0 \Leftrightarrow a=\pm b$:

+ Khi $a=b$ ta có $D=0; D_x=0; D_y=0$ hệ phương trình có nghiệm là nghiệm của phương trình $a(x-1)+ay=1$ hay $ax+ay=a+1$ (*)

Nếu $a=0$ thì phương trình (*) vô nghiệm, do đó nếu $a\neq 0$ thì (*) $\Leftrightarrow y=\dfrac{-ax+a+1}{a}$

Vì vậy hệ phương trình có nghiệm dạng $(x;y)=\left(t;\dfrac{-at+a+1}{a}\right)$

+ Khi $a=-b$ ta có $D=0; D_y=-2b$

Nếu $b\neq 0 \Rightarrow D=0; D_y\neq 0$ suy ra hệ phương trình vô nghiệm

Nếu $a=b=0$: Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} 0.x+0.y=1 \\ 0.x+0.y=1 \end{cases} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

Kết luận

$a\neq b$ và $a\neq -b$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{a+b+1}{a+b};\dfrac{1}{a+b}\right)$

$a=b\neq 0$ hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=\left(t;\dfrac{-at+a+1}{a}\right)$

$a=-b$ hệ phương trình vô nghiệm

Ví dụ 3: Tìm m để hệ vô nghiệm $\begin{cases}2m^2x+3(m-1)y=3\\ m(x+y)-y=2\end{cases}$

Lời giải

Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases}2m^2x+3(m-1)y=3\\ mx+(m-2)y=2\end{cases}$

Ta có $D=\begin{vmatrix}2m^2 & 3(m-1)\\ m & m-2\end{vmatrix}=2m^3-7m^2+3m$

$D_x=\begin{vmatrix}3 & 3(m-1)\\ 2 & m-2\end{vmatrix}=-3m$; $D_y=\begin{vmatrix}2m^2 & 3\\ m & 2\end{vmatrix}=4m^2-3m$

Hệ đã cho vô nghiệm xảy ra trong hai trường hợp sau

TH1: $\begin{cases}D=0\\ D_x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m^3-7m^2+3m=0\\ -3m\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m(2m^2-7m+3)=0\\ m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow 2m^2-7m+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\ m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

TH2: $\begin{cases}D=0\\ D_y\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m^3-7m^2+3m=0\\ 4m^2-3m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=3\\ m=0\\ m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\ m\neq 0\\ m\neq\dfrac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\ m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Vậy hệ vô nghiệm khi $m=3$ và $m=\dfrac{1}{2}$

Ví dụ 4: Tìm các giá trị của b sao cho với mọi a thì hệ phương trình $\begin{cases}x+2ay=b\\ ax+(1-a)y=b^2\end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải

Ta có: $D = \begin{vmatrix} 1 & 2a \\ a & 1-a \end{vmatrix} = 1 - a - 2a^2$

$\Rightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow 2a^2 + a - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -1 \\ a \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} a \neq -1 \\ a \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$ thì hệ phương trình có nghiệm

Khi $a = -1$, hệ trở thành: $\begin{cases} x - 2y = b \\ x - 2y = -b^2 \end{cases}$,

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow b = -b^2 \Leftrightarrow b + b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = -1 \end{array}\right.$

Khi $a = \dfrac{1}{2}$, hệ trở thành $\begin{cases} x + y = b \\ x + y = 2b^2 \end{cases}$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow b = 2b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Vậy hệ có nghiệm với mọi $a \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = -1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow b = 0$

Ví dụ 4: Tùy vào m hãy tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P(x;y) = (x + 2my + 1)^2 + (mx + 2y)^2$$

Lời giải

Ta có $P(x;y) \geq 0$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x + 2my + 1 = 0 \\ mx + 2y = 0 \end{cases}$ (*)

$D = \begin{vmatrix} 1 & 2m \\ m & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2m^2$

Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow 2-2m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$ thì hệ phương trình (*) có nghiệm do đó $\min P(x;y)=0$.

Nếu $D=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right.$

Với $m=1$ ta có $P(x;y)=(x+2y+1)^2+(x+2y)^2=2(x+2y)^2+2(x+2y)+1$

$\Rightarrow P(x;y)=2\left(x+2y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$

Suy ra $\min P(x;y)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x+2y+\frac{1}{2}=0$

Với $m=-1$ ta có $P(x;y)=(x-2y+1)^2+(-x+2y)^2=2(x-2y)^2+2(x-2y)+1$

$\Rightarrow P(x;y)=2\left(x-2y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$

Suy ra $\min P(x;y)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x-2y+\frac{1}{2}=0$

Vậy $m \neq \pm 1$ thì $\min P(x;y)=0$, $m=\pm 1$ thì $\min P(x;y)=\frac{1}{2}$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.48: Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} mx+2y=2m \\ x+y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (m+1)x-2y=m-1 \\ m^2x-y=m^2+2m \end{cases}$

Bài 3.49: Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} (m+1)x+8y=4m \\ mx+(m+3)y=3m-1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất

Bài 3.50: Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} -4x+my=m+1 \\ (m+6)x+2y=m+3 \end{cases}$ có vô số nghiệm:

Bài 3.51: Tùy theo giá trị của m, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P(x;y)=(mx+2y-2m)^2+(x+y-3)^2$$

Bài 3.52: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (2m+1)x-3y=3m-2 \\ (m+3)x-(m+1)y=2m \end{cases}$.

a) Tìm m để hệ có nghiệm.

b) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất (x;y) thỏa mãn $x \geq 2y$.

c) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất (x;y) sao cho $P=x^2+3y^2$ nhỏ nhất .

Bài 3.53: Giải và biện luận hệ: $\begin{cases} m\sqrt{x+1}+\sqrt{y}=m+1 \\ \sqrt{x+1}+m\sqrt{y}=2 \end{cases}$