

✎ **DẠNG 2 :** Chứng minh đẳng thức lượng giác, chứng minh biểu thức không phụ thuộc x , đơn giản biểu thức.

1. Phương pháp giải.

- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản
- Sử dụng tính chất của giá trị lượng giác
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Chứng minh các đẳng thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$

b) $\frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$

c) $\frac{\cos x + \sin x}{\cos^3 x} = \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$

Lời giải

a)
$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x &= \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x - 2\sin^2 x \cos^2 x \\ &= \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x \end{aligned}$$

b)
$$\frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} = \frac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 - \frac{1}{\tan x}} = \frac{\frac{\tan x + 1}{\tan x}}{\frac{\tan x - 1}{\tan x}} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$$

c)
$$\begin{aligned} \frac{\cos x + \sin x}{\cos^3 x} &= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^3 x} = \tan^2 x + 1 + \tan x \tan^2 x + 1 \\ &= \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1 \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$\frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)} + \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)} - \frac{\cos(A+C)}{\sin B} \cdot \tan B = 2$$

Lời giải

Vì $A + B + C = 180^\circ$ nên

$$\begin{aligned} VT &= \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{180^\circ - B}{2}\right)} + \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{180^\circ - B}{2}\right)} - \frac{\cos(180^\circ - B)}{\sin B} \cdot \tan B \\ &= \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} - \frac{-\cos B}{\sin B} \cdot \tan B = \sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + 1 = 2 = VP \end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 3: Đơn giản các biểu thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $A = \sin(90^\circ - x) + \cos(180^\circ - x) + \sin^2 x(1 + \tan^2 x) - \tan^2 x$

$$b) B = \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}} - \sqrt{2}$$

Lời giải

$$a) A = \cos x - \cos x + \sin^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x = 0$$

$$\begin{aligned} b) B &= \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos x + 1 + \cos x}{1 - \cos x} + \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}} - \sqrt{2} \\ &= \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{1 - \cos^2 x}} - \sqrt{2} = \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{\sin^2 x}} - \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) = \sqrt{2} \cot^2 x \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x.

$$P = \sqrt{\sin^4 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{1 - \cos^2 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{1 - \sin^2 x + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x} \\ &= \sqrt{4 \cos^4 x + 4 \cos^2 x + 1} + \sqrt{4 \sin^4 x + 4 \sin^2 x + 1} \\ &= \sqrt{2 \cos^2 x + 1} + \sqrt{2 \sin^2 x + 1} \\ &= 2 \cos^2 x + 1 + 2 \sin^2 x + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Vậy P không phụ thuộc vào x.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 2.3. Chứng minh các đẳng thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

- $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$
- $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$
- $\frac{\tan^3 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x \cos x} + \frac{\cot^3 x}{\cos^2 x} = \tan^3 x + \cot^3 x$
- $\sin^2 x - \tan^2 x = \tan^6 x (\cos^2 x - \cot^2 x)$
- $\frac{\tan^2 a - \tan^2 b}{\tan^2 a \cdot \tan^2 b} = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin^2 a \cdot \sin^2 b}$

Bài 2.4. Đơn giản các biểu thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

- $A = \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 180^\circ - x - \cos^2 180^\circ - x$
- $B = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \tan^2 x} - \cos^2 x$
- $C = \frac{\sin^3 a + \cos^3 a}{\cos^2 a + \sin a (\sin a - \cos a)}$
- $D = \sqrt{\frac{1 + \sin a}{1 - \sin a}} + \sqrt{\frac{1 - \sin a}{1 + \sin a}}$

Bài 2.5. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào α . (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $(\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - (\tan \alpha - \cot \alpha)^2$

b) $2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)$

c) $\cot^2 30^\circ (\sin^8 \alpha - \cos^8 \alpha) + 4 \cos 60^\circ (\cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha) - \sin^6(90^\circ - \alpha) \tan^2 \alpha - 1$ ³

d) $(\sin^4 x + \cos^4 x - 1)(\tan^2 x + \cot^2 x + 2)$

e) $\frac{\sin^4 x + 3 \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x + 3 \cos^4 x - 1}$

Bài 2.6: Cho tam giác ABC . Hãy rút gọn

a) $A = \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{A+C}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{A+C}{2}$

b) $B = \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{A+C}{2}} - \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{A+C}{2}} - \frac{\cos A+C}{\sin B} \cdot \tan B$