

DẠNG TOÁN 2 : XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC CHỨA GÓC ĐẶC BIỆT, GÓC LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT VÀ DẤU CỦA GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC.

1. Phương pháp giải.

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản và giá trị lượng giác của góc liên quan đặc biệt
- Để xác định dấu của các giá trị lượng giác của một cung (góc) ta xác định điểm ngọn của cung (tia cuối của góc) thuộc góc phần tư nào và áp dụng bảng xét dấu các giá trị lượng giác.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin \frac{7\pi}{6} + \cos 9\pi + \tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + \cot \frac{7\pi}{2}$

b) $B = \frac{1}{\tan 368^\circ} + \frac{2 \sin 2550^\circ \cos(-188^\circ)}{2 \cos 638^\circ + \cos 98^\circ}$

c) $C = \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 65^\circ$

d) $D = \tan^2 \frac{\pi}{8} \cdot \tan \frac{3\pi}{8} \cdot \tan \frac{5\pi}{8}$

Lời giải

a) Ta có $A = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \cos \pi + 4.2\pi - \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{2} + 3\pi\right)$

$$\Rightarrow A = -\sin \frac{\pi}{6} + \cos \pi - \tan \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2} - 1 - 1 + 0 = -\frac{5}{2}$$

b) Ta có $B = \frac{1}{\tan 8^\circ + 360^\circ} + \frac{2 \sin 30^\circ + 7.360^\circ \cos(8^\circ + 180^\circ)}{2 \cos -90^\circ + 8^\circ + 2.360^\circ + \cos 90^\circ + 8^\circ}$

$$B = \frac{1}{\tan 8^\circ} + \frac{2 \sin 30^\circ - \cos 8^\circ}{2 \cos 8^\circ - 90^\circ - \sin 8^\circ} = \frac{1}{\tan 8^\circ} + \frac{2 \cdot \frac{1}{2} - \cos 8^\circ}{2 \cos 90^\circ - 8^\circ - \sin 8^\circ} =$$
$$= \frac{1}{\tan 8^\circ} - \frac{\cos 8^\circ}{2 \sin 8^\circ - \sin 8^\circ} = \frac{1}{\tan 8^\circ} - \frac{\cos 8^\circ}{\sin 8^\circ} = 0$$

c) Vì $25^\circ + 65^\circ = 90^\circ \Rightarrow \sin 65^\circ = \cos 25^\circ$ do đó

$$C = \sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Suy ra $C = \frac{7}{4}$.

d) $D = -\left[\tan \frac{\pi}{8} \cdot \tan \frac{3\pi}{8}\right] \cdot \left[\tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) \tan \frac{5\pi}{8}\right]$

$$\text{Mà } \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \frac{3\pi}{8} = \cot \frac{\pi}{8}, \tan \frac{5\pi}{8} = \cot \left(-\frac{\pi}{8} \right)$$

$$\text{Nên } D = - \left[\tan \frac{\pi}{8} \cdot \cot \frac{\pi}{8} \right] \cdot \left[\tan \left(-\frac{\pi}{8} \right) \cot \left(-\frac{\pi}{8} \right) \right] = -1.$$

Ví dụ 2: Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xác định dấu của các biểu thức sau:

a) $\sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)$

b) $\tan \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right)$

c) $\cos \left(-\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \cdot \tan \pi - \alpha$

d) $\sin \frac{14\pi}{9} \cdot \cot \pi + \alpha$

Lời giải

a) Ta có $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \pi < \frac{\pi}{2} + \alpha < \frac{3\pi}{2}$ suy ra $\sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) < 0$

b) Ta có $-\frac{\pi}{2} > -\alpha > -\pi \Rightarrow 0 > \frac{3\pi}{2} - \alpha > -\frac{\pi}{2}$ suy ra $\tan \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) < 0$

c) Ta có $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow 0 < -\frac{\pi}{2} + \alpha < \frac{\pi}{2}$ suy ra $\cos \left(-\frac{\pi}{2} + \alpha \right) > 0$

Và $0 < \pi - \alpha < \frac{\pi}{2}$ suy ra $\tan \pi + \alpha > 0$

Vậy $\cos \left(-\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \cdot \tan \pi + \alpha > 0$.

d) Ta có $\frac{3\pi}{2} < \frac{14\pi}{9} < 2\pi \Rightarrow \sin \frac{14\pi}{9} < 0$.

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \pi + \alpha < 2\pi$ suy ra $\cot \pi + \alpha < 0$.

Vậy $\sin \frac{14\pi}{9} \cdot \cot \pi + \alpha > 0$.

3. Bài tập luyện tập:

Các bài tập sau đây đều không sử dụng máy tính bỏ túi

Bài 6.9: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \frac{\sin 405^\circ + \sin 495^\circ}{\cos 1830^\circ + \cos 3660^\circ}$

b) $B = \frac{1 + \cos 1800^\circ \tan(-390^\circ)}{\tan(-420^\circ)}$

c) $D = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$

d) $E = \tan 5^\circ \tan 10^\circ \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \tan 85^\circ$

e) $F = \cos^2 15^\circ + \cos^2 35^\circ + \cos^2 55^\circ + \cos^2 75^\circ$

Bài 6.10: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = 5 \sin^2 \frac{151\pi}{6} + 3 \cos^2 \frac{85\pi}{3} - 4 \tan^2 \frac{193\pi}{6} + 7 \cot^2 \frac{37\pi}{3}$.

b) $B = \cos^2 \frac{\pi}{5} + \cos^2 \frac{2\pi}{5} + \cos^2 \frac{\pi}{10} + \cos^2 \frac{3\pi}{10}$.

c) $C = \tan \frac{\pi}{9} \tan \frac{2\pi}{9} \tan \frac{5\pi}{18} \tan \frac{7\pi}{18}$

Bài 6.11: Xác định dấu của các biểu thức sau:

a) $A = \sin 50^\circ \cdot \cos(-300^\circ)$ b) $B = \sin 215^\circ \cdot \tan \frac{22\pi}{7}$ c) $C = \cot \frac{3\pi}{5} \cdot \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

Bài 6.12: Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Xét dấu của các biểu thức sau:

a) $\sin(\alpha + 90^\circ)$ b) $\cot(\alpha - 90^\circ)$
c) $\tan(270^\circ - \alpha)$ d) $\cos(2\alpha + 90^\circ)$

Bài 6.13: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xét dấu của các biểu thức sau:

a) $\cos(\alpha + \pi)$ b) $\tan(\alpha - \pi)$
c) $\sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right)$ d) $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right)$

Bài 6.14: Cho tam giác ABC có góc A tù. Xét dấu của các biểu thức sau:

a) $M = \sin A + \sin B + \sin C$ b) $N = \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$
c) $P = \cos \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}$ d) $Q = \cot A \tan B \cot C$