

➤ DẠNG 2: ỨNG DỤNG XÉT DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT HAI ẨN VÀO GIẢI TOÁN.

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình sau

a) $x - 1 \cdot 2 - 3x \geq 0$

b) $x - 2 \cdot x^2 - 5x + 4 < 0$

c) $2x - 1 \cdot x^3 - 1 \leq 0$

d) $x \cdot \sqrt{3}x - 3 \cdot 3 - x^2 \leq 0$

Lời giải

a) Ta có $x - 1 \cdot 2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	1	$+\infty$	
$x - 1$	-		-	0	+
$2 - 3x$	+	0	-		-
$x - 1 \cdot 2 - 3x$	-	0	+	0	-

Suy ra bất phương trình có tập nghiệm là $S = \left[\frac{2}{3}; 1 \right]$.

b) Ta có $x - 2 \cdot x^2 - 5x + 4 = x - 2 \cdot x - 1 \cdot x - 4$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	2	4	$+\infty$
$x - 1$	-	0	+		+
$x - 2$	-		-	0	+
$x - 3$	-		-		0
$x - 2 \cdot x^2 - 5x + 4$	-	0	+	0	-

Suy ra bất phương trình có tập nghiệm là $S = (-\infty; 1) \cup (2; 4)$.

c) Ta có $2x - 1 \cdot x^3 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 2x - 1 \cdot x - 1 \cdot x^2 + x + 1 \leq 0$

$\Leftrightarrow 2x - 1 \cdot x - 1 \leq 0$ (vì $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$)

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$x - 1$	-		-	0	+
$2x - 1$	-	0	+		+
$x - 1 \cdot 2 - 3x$	+	0	-	0	+

Suy ra bất phương trình có tập nghiệm là $S = \left[\frac{1}{2}; 1 \right]$.

d) Ta có $x \cdot \sqrt{3}x - 3 \cdot 3 - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x\sqrt{3} \cdot x - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - x \cdot \sqrt{3} + x \leq 0$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}x \quad x - \sqrt{3} \quad x + \sqrt{3} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x \quad x + \sqrt{3} \geq 0 \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$+\infty$
x	-		-	+
$x + \sqrt{3}$	-	0	+	
$x - 1 \quad 2 - 3x$	+	0	-	0

Suy ra $x \quad x + \sqrt{3} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [0; +\infty)$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [0; +\infty)$

Ví dụ 2: Giải các bất phương trình sau

a) $\frac{-2x + 4}{2x - 1} \leq \frac{x + 2}{3x + 1}$ b) $\frac{x - 3}{x^2 - 1} < 1$ c) $\frac{1}{x - 2} \leq \frac{1}{x + 4}$

Lời giải

a) Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$3x + 1$	-	0	+		+
$2x - 1$	-		-	0	+
$-2x + 4$	+		+		0
$\frac{-2x + 4}{2x - 1} \leq \frac{x + 2}{3x + 1}$	+		-		+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}) \cup [2; +\infty)$

b) Ta có $\frac{x - 3}{x^2 - 1} < 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{x - 3}{x^2 - 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x + 5}{x - 1} > 0$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-5	-1	1	$+\infty$
$x + 5$	-	0	+		+
$x + 1$	-		-	0	+
$x - 1$	-		-		0
$\frac{x + 5}{x - 1} > 0$	-	0	+		-

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-5; -1) \cup (1; +\infty)$

c) ĐKXD: $\begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -4 \end{cases}$

Ta có $\frac{1}{x - 2} \leq \frac{1}{x + 4} \Leftrightarrow \frac{1}{x + 4} - \frac{1}{x - 2} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x}{(x + 4)(x - 2)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x - 4)}{(x + 4)(x - 2)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x - 4)}{(x + 4)} \geq 0$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	0	4	$+\infty$
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x(x-4)}{(x+4)}$	$-$	$ $	$+$	$-$	0

Kết hợp với điều kiện xác định suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-4; 0] \cup [4; +\infty)$

Ví dụ 3: Giải các bất phương trình sau:

a) $|2x + 1| < 3x$ b) $||2x - 1| - 4| > 3$ c) $|x+1| - |x-2| \geq 3$

Lời giải

a) Với $x \geq -\frac{1}{2}$ ta có bất phương trình tương đương với $2x + 1 < 3x \Leftrightarrow x > 1$

Kết hợp với điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$ suy ra bất phương trình có tập nghiệm là $(1; +\infty)$

Với $x < -\frac{1}{2}$ ta có bất phương trình tương đương với $-2x - 1 < 3x \Leftrightarrow x > -\frac{1}{5}$

Kết hợp với điều kiện $x < -\frac{1}{2}$ suy ra bất phương trình vô nghiệm

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1; +\infty)$.

b) Ta có $||2x - 1| - 4| > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} |2x - 1| - 4 > 3 \\ |2x - 1| - 4 < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2x - 1| > 7 \\ |2x - 1| < 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 > 7 \\ 2x-1 < -7 \\ -1 < 2x-1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < -3 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = -\infty; -3 \cup 0; 1 \cup 4; +\infty$.

c) Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu đó ta chia ra các trường hợp sau

Với $x < -1$ ta có bất phương trình tương đương với

$$-(x+1) + (x-2) \geq 3 \Leftrightarrow -3 \geq 3 \text{ (vô nghiệm)}$$

Với $-1 \leq x < 2$ ta có bất phương trình tương đương với

$$(x+1) + (x-2) \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 2$$

Kết hợp với điều kiện $-1 \leq x < 2$ suy ra bất phương trình vô nghiệm

Với $x \geq 2$ ta có bất phương trình tương đương với

$$(x+1) - (x-2) \geq 3 \Leftrightarrow 3 \geq 3$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq 2$ suy ra bất phương trình có nghiệm là $x \geq 2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [2; +\infty)$.

Ví dụ 4: Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{|x-2|-x}{x} < 1$ b) $\frac{|x-1|-1}{x^4-x^2} \geq 0$ c) $\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1})(\sqrt{x+1}-2)}{x-1} \leq 0$

Lời giải

a) Với $x \geq 2$ ta có bất phương trình tương đương với

$$\frac{x-2-x}{x} < 1 \Leftrightarrow \frac{-2}{x} < 1 \Leftrightarrow x > -2$$

Kết hợp điều kiện $x \geq 2$ suy ra tập nghiệm bất phương trình là $S_1 = [2; +\infty)$

Với $x < 2$ ta có bất phương trình tương đương với

$$\frac{2-x-x}{x} < 1 \Leftrightarrow \frac{2-2x}{x} < 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{2-2x}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{3x-2}{x} > 0$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	
x	-	0	+	+	
$3x-2$	-		0	+	
$\frac{3x-2}{x}$	+		-	0	+

Kết hợp điều kiện $x < 2$ suy ra tập nghiệm bất phương trình là $S_2 = (-\infty; 0) \cup (\frac{2}{3}; 2)$.

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $S = S_1 \cup S_2 = (-\infty; 0) \cup (\frac{2}{3}; +\infty)$

b) ĐKXD: $x^4 - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 1 \end{cases}$

Ta có $\frac{|x-1|-1}{x^4-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(|x-1|+1)(|x-1|-1)}{x^4-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{|x-1|^2-1}{x^4-x^2} \geq 0$

$$\frac{x^2-x}{x^4-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{x^2(x-1)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x(x+1)} \geq 0$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$x+1$	-	0	+	+	
x	-		0	+	
$\frac{1}{x(x+1)}$	+		-		+

Kết hợp điều kiện xác định suy ra tập nghiệm bất phương trình là $S = (-\infty; -1) \cup (0; +\infty) \setminus \{1\}$.

c) ĐKXD: $\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \geq -1 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$

Vì $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-1} > 0$, $\sqrt{x+1} - 2 > 0$ nên bất phương trình tương đương với

$$\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1})(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{x-1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(-x+2)(x-3)}{x-1} \leq 0$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$-x+2$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{(-x+2)(x-3)}{x-1}$	$+$	\parallel	$-$	0	$-$

Kết hợp với điều kiện xác định suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1;2] \cup [3;+\infty)$.

Nhận xét:

* Đối với bất phương trình phức tạp chúng ta nên đặt điều kiện xác định sau đó rồi rút gọn cho biểu thức chung hoặc rút gọn biểu thức luôn xác định một dấu.

* Nhiều khi chúng ta cần phải nhân hay chia với một biểu thức luôn xác định một dấu nhằm khử đi căn thức hay dấu giá trị tuyệt đối thì bài toán trở nên đơn giản hơn.

Ví dụ 5: Cho hệ bất phương trình

$$\begin{cases} \frac{(x-\sqrt{2})(2-2x)}{(2x-1)(x+2)} \geq 0 & (1) \\ mx > 2 & (2) \end{cases}$$

a) Giải hệ bất phương trình khi $m = -1$

b) Tìm m để hệ bất phương trình có nghiệm

Lời giải

$$\text{ĐKXD: } \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}(x-\sqrt{2})(\sqrt{2}-x)}{(2x-1)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ \frac{1}{(2x-1)(x+2)} \leq 0 \end{cases}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$2x-1$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{1}{(2x-1)(x+2)}$	$+$	\parallel	$-$	$+$

Kết hợp với điều kiện suy ra tập nghiệm bất phương trình (1) là $S_1 = \left(-2; \frac{1}{2}\right) \cup \{\sqrt{2}\}$

a) Khi $m = -1$ ta có bất phương trình (2) trở thành $-x > 2 \Leftrightarrow x < -2$

Kết hợp với điều kiện suy ra tập nghiệm bất phương trình (2) là $S_2 = (-\infty; -2)$

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S = S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

b) Với $m = 0$ bất phương trình (2) trở thành $0.x > 2$ suy ra bất phương trình vô nghiệm do đó hệ bất

phương trình vô nghiệm

- Với $m > 0$ bất phương trình (2) $\Leftrightarrow x > \frac{2}{m}$

Đổi chiều với điều kiện ta có

Nếu $\frac{2}{m} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow m \leq 4$ thì tập nghiệm bất phương trình (2) là $S_2 = \left(\frac{2}{m}; +\infty\right)$

Hệ bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m \leq 4 \\ \frac{2}{m} < \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m \leq 4 \\ m > \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2} < m \leq 4$

Nếu $\frac{2}{m} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow m > 4$ thì tập nghiệm bất phương trình (2) là $S_2 = \left(\frac{2}{m}; +\infty\right) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Hệ bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ \frac{2}{m} < \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m > \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > 4$

- Với $m < 0$ bất phương trình (2) $\Leftrightarrow x < \frac{2}{m}$

Đổi chiều với điều kiện ta có

Nếu $\frac{2}{m} > -2 \Leftrightarrow m > -1$ thì tập nghiệm bất phương trình (2) là $S_2 = \left(-\infty; \frac{2}{m}\right) \setminus \{-2\}$

Hệ bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 0 \\ \frac{2}{m} > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 0 \\ m > -1 \end{cases} \Rightarrow -1 < m < 0$

Nếu $\frac{2}{m} \leq -2 \Leftrightarrow m \leq -1$ thì tập nghiệm bất phương trình (2) là $S_2 = \left(-\infty; \frac{2}{m}\right)$

Hệ bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ \frac{2}{m} > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m > -1 \end{cases}$ (loại)

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1 < m < 0$ và $m > \sqrt{2}$.

3. Bài tập luyện tập

Bài 4.82: Giải các bất phương trình sau:

a) $3x^2 - 10x + 3 \geq 0$

b) $(\sqrt{2} - x)(x^2 - 2)(2x - 4) < 0$

c) $\frac{1}{x+9} - \frac{1}{x} > \frac{1}{2}$

d) $\frac{2}{1-2x} \leq \frac{3}{x+1}$

e) $\frac{|2x-1| - x}{2x} > 1$

f) $\frac{2-|x-2|}{x^2-1} \geq 0$

g) $\frac{\sqrt{x+4}-2}{4-9x^2} \leq 0$

h) $\frac{x^2-2x-3}{\sqrt[3]{3x-1} + \sqrt[3]{4-5x}} \geq 0$

Bài 4.83: Giải các bất phương trình sau:

a) $|x-2| < \frac{x}{2}$

b) $4x - |2x+1| \leq 3$

c) $||3x - 2| - 1| > 4$

c) $|2x + 3| - |3x + 4| \geq -5$

hoc360.net