

➤ **DẠNG TOÁN 2: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHÉP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG VÀ HỆ QUẢ**

1. Phương pháp giải.

Để giải phương trình ta thực hiện các phép biến đổi để đưa về phương trình tương đương với phương trình đã cho đơn giản hơn trong việc giải nó. Một số phép biến đổi thường sử dụng

- Cộng (trừ) cả hai vế của phương trình mà không làm thay đổi điều kiện xác định của phương trình ta thu được phương trình tương đương phương trình đã cho.
- Nhân (chia) vào hai vế với một biểu thức khác không và không làm thay đổi điều kiện xác định của phương trình ta thu được phương trình tương đương với phương trình đã cho.
- Bình phương hai vế của phương trình ta thu được phương trình hệ quả của phương trình đã cho.
- Bình phương hai vế của phương trình (hai vế luôn cùng dấu) ta thu được phương trình tương đương với phương trình đã cho.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau

a) $1 + \frac{1}{x-3} = \frac{5}{x^2 - x - 6}$

b) $\frac{x^2}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\sqrt{x-2}} - \sqrt{x-2}$

c) $\sqrt{x+3}(x^4 - 3x^2 + 2) = 0$

d) $\sqrt{\sqrt{x}-1}(x^2 - x - 2) = 0$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $\begin{cases} x \neq 3 \\ x^2 - x - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq -2 \end{cases}$

Với điều kiện đó phương trình tương đương với

$$1 + \frac{1}{x-3} = \frac{5}{(x-3)(x+2)} \Leftrightarrow (x-3)(x+2) + x + 2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Đối chiếu với điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x = -3$.

b) ĐKXĐ: $x > 2$

Với điều kiện đó phương trình tương đương với

$$x^2 = 1 - (x-2) \Leftrightarrow x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Đối chiếu với điều kiện ta thấy không có giá trị nào thỏa mãn

Vậy phương trình vô nghiệm.

c) ĐKXĐ: $x \geq -3$

Phương trình tương đương với $\begin{cases} \sqrt{x+3} = 0 \\ x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ (x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = -3$, $x = \pm 1$ và $x = \pm\sqrt{2}$.

$$\text{d) ĐKXD: } \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$

Với điều kiện đó phương trình tương đương với

$$\begin{cases} \sqrt{\sqrt{x} - 1} = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x = 1$ và $x = 2$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau

$$\text{a) } \sqrt{2x - 3} = \sqrt{4x^2 - 15}$$

$$\text{b) } \sqrt{x^2 - 3x + 4} = 8 - 3x.$$

$$\text{c) } |2x + 1| = |x - 2|$$

$$\text{d) } |2x + 1| = x - 1$$

Lời giải

$$\text{a) ĐKXD: } \begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ 4x^2 - 15 \geq 0 \end{cases} (*)$$

Với điều kiện (*) phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} (\sqrt{2x - 3})^2 &= (\sqrt{4x^2 - 15})^2 \Leftrightarrow 2x - 3 = 4x^2 - 15 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 12 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Thay vào điều kiện (*) ta thấy chỉ có $x = 2$ thỏa mãn

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$

$$\text{b) ĐKXD: } x^2 - 3x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq 0 \text{ (luôn đúng với mọi } x)$$

Bình phương hai vế của phương trình ta được

$$x^2 - 3x + 4 = (8 - 3x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 = 9x^2 - 48x + 64$$

$$8x^2 - 45x + 60 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{45 \pm \sqrt{105}}{16}$$

Thay vào phương trình ta thấy chỉ có $x = \frac{45 - \sqrt{105}}{16}$ và đó là nghiệm duy nhất của phương trình.

c) Phương trình tương đương với $(|2x + 1|)^2 = (|x - 2|)^2$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 8x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = -3$ và $x = \frac{1}{3}$.

d) Ta có $|2x + 1| = x - 1 \Rightarrow (2x + 1)^2 = (x - 1)^2$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Thử vào phương trình ta thấy không có giá trị nào thỏa mãn
Vậy phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 3: Tìm nghiệm $(x; y)$ với x là số nguyên dương của phương trình sau

$$\sqrt{20 - 8x} + \sqrt{6x^2 - y^2} = y\sqrt{7 - 4x}$$

Lời giải

Nếu phương trình có nghiệm $(x; y)$ thì x phải thỏa mãn $\begin{cases} 20 - 8x \geq 0 \\ 7 - 4x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{20}{8} \\ x \leq \frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{7}{4}$

Vì x là số nguyên dương nên $x = 1$

Thay $x = 1$ vào phương trình ta được $\sqrt{12} + \sqrt{6 - y^2} = y\sqrt{3}$ (*)

Điều kiện xác định của phương trình (*) là $6 - y^2 \geq 0$

$$(*) \Rightarrow \sqrt{6 - y^2} = \sqrt{3}(y - 2) \Rightarrow 6 - y^2 = 3(y - 2)^2$$

$$\Rightarrow 4y^2 - 12y + 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Thử vào phương trình (*) thấy chỉ có $y = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$ là thỏa mãn

Vậy phương trình có nghiệm thỏa mãn đề bài là $\left(1; \frac{3 + \sqrt{3}}{2}\right)$.

Ví dụ 4: Tìm m để cặp phương trình sau tương đương

a) $mx^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$ (1) và $(m-2)x^2 - 3x + m^2 - 15 = 0$ (2)

b) $2x^2 + mx - 2 = 0$ (3) và $2x^3 + (m+4)x^2 + 2(m-1)x - 4 = 0$ (4)

Lời giải

a) Giả sử hai phương trình (1) và (2) tương đương

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow (x-1)(mx-m+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ mx - m + 2 = 0 \end{cases}$$

Do hai phương trình tương đương nên $x = 1$ là nghiệm của phương trình (2)

Thay $x = 1$ vào phương trình (2) ta được

$$(m-2) - 3 + m^2 - 15 = 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -5 \end{cases}$$

- Với $m = -5$: Phương trình (1) trở thành $-5x^2 + 12x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{7}{5} \end{cases}$

Phương trình (2) trở thành $-7x^2 - 3x + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{10}{7} \end{cases}$

Suy ra hai phương trình không tương đương

- Với $m = 4$: Phương trình (1) trở thành $4x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$

Phương trình (2) trở thành $2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

Suy ra hai phương trình tương đương

Vậy $m = 4$ thì hai phương trình tương đương.

b) Giả sử hai phương trình (3) và (4) tương đương

Ta có $2x^3 + (m+4)x^2 + 2(m-1)x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(2x^2 + mx - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ 2x^2 + mx - 2 = 0 \end{cases}$$

Do hai phương trình tương đương nên $x = -2$ cũng là nghiệm của phương trình (3)

Thay $x = -2$ vào phương trình (3) ta được $2(-2)^2 + m(-2) - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 3$

- Với $m = 3$ phương trình (3) trở thành $2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

Phương trình (4) trở thành $2x^3 + 7x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2(2x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Suy ra phương trình (3) tương đương với phương trình (4)

Vậy $m = 3$.

3. Bài tập tự luyện.

Bài 3.2: Giải các phương trình sau

a) $1 + \frac{1}{2-x} = \frac{6}{4-x^2}$

b) $\frac{2x}{\sqrt{3-x}} = \frac{1}{\sqrt{3-x}} - \sqrt{3-x}$

c) $\sqrt{x+1}(x^2-16) = 0$

d) $\frac{\sqrt{3-x}}{x^2-2x-3} = 0$

Bài 3.3: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x-2} = \sqrt{x^2-8}$

b) $\sqrt{3x^2-x-9} = x-1$.

c) $|2x+3| = |2x-3|$

d) $|2x-1| = 3x-4$

Bài 3.4: Tìm m để cặp phương trình sau tương đương

a) $x^2 + mx - 1 = 0$ (1) và $(m-1)x^2 + 2(m-2)x + m-3 = 0$ (2)

b) $(2m-2)x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 17 = 0$ (3) và $(2-m)x^2 + 3x + 15 - m^2 = 0$ (4)