DẠNG TOÁN 2: XÉT TÍNH CHẴN, LẺ CỦA HÀM SỐ

1. Phương pháp giải.

*** Sử dụng định nghĩa**

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên D :

- Hàm số chẵn $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$.
- Hàm số lẻ $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$.

Chú ý : Một hàm số có thể không chẵn cũng không lẻ

Đồ thị hàm số chẵn nhận trục Oy làm trục đối xứng

Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng

*** Quy trình xét hàm số chẵn, lẻ.**

B1: Tìm tập xác định của hàm số.

B2: Kiểm tra

Nếu $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ Chuyển qua bước ba

Nếu $\exists x_0 \in D \Rightarrow -x_0 \notin D$ kết luận hàm không chẵn cũng không lẻ.

B3: xác định $f(-x)$ và so sánh với $f(x)$.

Nếu bằng nhau thì kết luận hàm số là chẵn

Nếu đối nhau thì kết luận hàm số là lẻ

Nếu tồn tại một giá trị $\exists x_0 \in D$ mà $f(-x_0) \neq f(x_0)$, $f(-x_0) \neq -f(x_0)$ kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $f(x) = 3x^3 + 2\sqrt[3]{x}$ b) $f(x) = x^4 + \sqrt{x^2 + 1}$

c) $f(x) = \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x}$ d) $f(x) = \sqrt{2+x} + \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$

Lời giải

a) Ta có TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $-x \in \mathbb{R}$ và $f(-x) = 3(-x)^3 + 2\sqrt[3]{-x} = -(3x^3 + 2\sqrt[3]{x}) = -f(x)$

Do đó $f(x) = 3x^3 + 2\sqrt[3]{x}$ là hàm số lẻ

b) Ta có TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $-x \in \mathbb{R}$ và $f(-x) = (-x)^4 + \sqrt{(-x)^2 + 1} = x^4 + \sqrt{x^2+1} = f(x)$

Do đó $f(x) = x^4 + \sqrt{x^2+1}$ là hàm số chẵn

c) ĐKXĐ: $\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5$

Suy ra TXĐ: $D = [-5;5]$

Với mọi $x \in [-5;5]$ ta có $-x \in [-5;5]$ và $f(-x) = \sqrt{(-x)+5} + \sqrt{5-(-x)} = \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} = f(x)$

Do đó $f(x) = \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x}$ là hàm số chẵn

d) ĐKXĐ: $\begin{cases} 2+x\ge 0 \\ 2-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow -2\le x<2$

Suy ra TXĐ: $\mathrm{D}=\left[-2;2\right)$

Ta có $x_0=-2\in\left[-2;2\right)$ nhưng $-x_0=2\notin\left[-2;2\right)$

Vậy hàm số $f(x)=\sqrt{2+x}+\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ không chẵn và không lẻ.

Ví dụ 2: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $f(x)=x^4-4x+2$

b) $f(x)=\left|\left|x+2\right|-\left|x-2\right|\right|$

c) $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}-x}-2x^2-1$

d) $f(x)=\begin{cases} -1 \;\; Khi\ x<0 \\ 0 \;\;\; Khi\ x=0 \\ 1 \;\;\; Khi\ x>0 \end{cases}$

Lời giải

a) Ta có TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có $f\left(-1\right)=7,\ f\left(1\right)=-1\Rightarrow \begin{cases} f\left(-1\right)\ne f\left(1\right) \\ f\left(-1\right)\ne -f\left(1\right) \end{cases}$

Vậy hàm số không chẵn và không lẻ

b) Ta có TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$

Với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có $-x\in\mathbb{R}$ và $f(-x)=\left|\left|(-x)+2\right|-\left|(-x)-2\right|\right|=\left|\left|x-2\right|-\left|x+2\right|\right|$

Suy ra $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$

Do đó $f(x)=\left|\left|x+2\right|-\left|x-2\right|\right|$ là hàm số chẵn.

c) Ta có $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=\left|x\right|\ge x\Rightarrow\sqrt{x^2+1}-x\ne 0$ với mọi x.

Suy ra TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Mặt khác $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=\left|x\right|\ge -x\Rightarrow\sqrt{x^2+1}+x\ne 0$ do đó

$$f(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}-2x^2-1=2x\sqrt{x^2+1}$$

Với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có $-x\in\mathbb{R}$ và $f(-x)=2(-x)\sqrt{(-x)^2+1}=-2x\sqrt{x^2+1}=-f(x)$

Do đó $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}-x}-2x^2-1$ là hàm số lẻ.

d) Ta có TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Dễ thấy mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có $-x\in\mathbb{R}$

Với mọi $x>0$ ta có $-x<0$ suy ra $f\left(-x\right)=-1, f\left(x\right)=1\Rightarrow f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$

Với mọi $x<0$ ta có $-x>0$ suy ra $f\left(-x\right)=1, f\left(x\right)=-1\Rightarrow f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$

Và $f\left(-0\right)=-f\left(0\right)=0$

Do đó với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$

Vậy hàm số $f(x)=\begin{cases}-1 \ \ Khi\ x<0\\ 0 \ \ Khi\ x=0\\ 1 \ \ Khi\ x>0\end{cases}$ là hàm số lẻ.

Ví dụ 3: Tìm m để hàm số: $f\left(x\right)=\dfrac{x^2\left(x^2-2\right)+\left(2m^2-2\right)x}{\sqrt{x^2+1}-m}$ là hàm số chẵn.

Lời giải

ĐKXĐ: $\sqrt{x^2+1}\neq m$ (*)

Giả sử hàm số chẵn suy ra $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$ với mọi x thỏa mãn điều kiện (*)

Ta có $f\left(-x\right)=\dfrac{x^2\left(x^2-2\right)-\left(2m^2-2\right)x}{\sqrt{x^2+1}-m}$

Suy ra $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$ với mọi x thỏa mãn điều kiện (*)

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2\left(x^2-2\right)-\left(2m^2-2\right)x}{\sqrt{x^2+1}-m}=\dfrac{x^2\left(x^2-2\right)+\left(2m^2-2\right)x}{\sqrt{x^2+1}-m}$ với mọi x thỏa mãn điều kiện (*)

$\Leftrightarrow 2\left(2m^2-2\right)x=0$ với mọi x thỏa mãn điều kiện (*)

$\Leftrightarrow 2m^2-2=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$

* Với $m=1$ ta có hàm số là $f\left(x\right)=\dfrac{x^2\left(x^2-2\right)}{\sqrt{x^2+1}-1}$

ĐKXĐ : $\sqrt{x^2+1}\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 0$

Suy ra TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$

Dễ thấy với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$ ta có $-x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$ và $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$

Do đó $f\left(x\right)=\dfrac{x^2\left(x^2-2\right)}{\sqrt{x^2+1}-1}$ là hàm số chẵn

* Với $m=-1$ ta có hàm số là $f\left(x\right)=\dfrac{x^2\left(x^2-2\right)}{\sqrt{x^2+1}+1}$

TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$

Dễ thấy với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có $-x\in\mathbb{R}$ và $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$

Do đó $f\left(x\right)=\dfrac{x^2\left(x^2-2\right)}{\sqrt{x^2+1}+1}$ là hàm số chẵn.

Vậy $m=\pm 1$ là giá trị cần tìm.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 2.4:: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $f\left(x\right)=\dfrac{x^3+5x}{x^2+4}$ b) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+5}{x^2-1}$ c) $f\left(x\right)=\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}$

d) $f\left(x\right)=\dfrac{x-5}{x-1}$ e) $f\left(x\right)=3x^2-2x+1$ f) $f\left(x\right)=\dfrac{x^3}{\left|x\right|-1}$

g) $f(x)=\dfrac{|x-1|+|x+1|}{|2x-1|+|2x+1|}$ h) $f(x)=\dfrac{|x+2|+|x-2|}{|x-1|-|x+1|}$

Bài 2.5: Tìm m để hàm số: $y=f(x)=\dfrac{x(x^2-2)+2m-1}{x-2m+1}$ là hàm số chẵn.

Bài 2.6: Cho hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ có cùng tập xác định D. Chứng minh rằng

a) Nếu hai hàm số trên lẻ thì hàm số $y=f(x)+g(x)$ là hàm số lẻ

b) Nếu hai hàm số trên một chẵn một lẻ thì hàm số $y=f(x)g(x)$ là hàm số lẻ

Bài 2.7: a) Tìm m để đồ thị hàm số sau nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng

$y=x^3-(m^2-9)x^2+(m+3)x+m-3$.

b) Tìm m để đồ thị hàm số sau nhận trục tung làm trục đối xứng

$y=x^4-(m^2-3m+2)x^3+m^2-1$.

Bài 2.8: Chứng minh rằng đồ thị hàm số sau nhận trục tung làm trục đối xứng: $y=x^2+\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}$.