4. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy

Với ha số không âm a, b bất kì ta luôn có :

$$(1) \qquad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

(trung bình cộng của hai số không âm luôn lớn hơn hoặc bằng trung bình nhân của chúng)

$$(2) \qquad \frac{a^2+b^2}{2} \geq ab \text{ hoặc } \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$$

Đẳng thức xảy ra khi a = b

Trên đây là bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm, (1) gọi là dạng có căn, và (2) là dạng không căn. Bất đẳng thức này còn được mở rộng cho n số không âm $a_1, a_2, ..., a_n \ (n \geq 2)$ như sau :

$$\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)^n \geq a_1 a_2 ... a_n$$

Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$

Sau đây là một số kĩ thuật tiêu biểu sử dụng bất đẳng tức Cauchy trong bài toán chứng minh bất đẳng thức hoặc tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

❖ **Kỹ thuật sử dụng trực tiếp**

Ví dụ 30. Co hai số dương a, b thỏa mãn : $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 2$. Chứng minh rằng : $a + b \geq 2$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $\frac{1}{a^2}; \frac{1}{b^2}$ ta có

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{2}{ab}$$

Kết hợp với giả thiết, ta có: $2 \geq \frac{2}{ab} \Rightarrow ab \geq 1 \qquad (1)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương a,b ta có $a + b \geq 2\sqrt{ab} \qquad (2)$

Kết hợp với (1) ta có: $a + b \geq 2$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi cả(1)và (2) xảy ra dấu bằng , hay $a = b = 1$

Ví dụ 31 . Cho hai số không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 \leq 2$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt[a]{3a\left(a+2b\right)}+\sqrt[b]{3bb+2a}\le 6$$

(Đề thi vào lớp 10 chuyên ngữ, ĐHNN – ĐHQG HN, 2008)

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm 3a và a + 2b ta có:

$$\sqrt[a]{3a\left(a+2b\right)}\le a.\frac{3a+\left(a+2b\right)}{2}=2a^2+ab \qquad (1)$$

Tương tự ta có $\sqrt[b]{3bb+2a}\le 2b^2+ab \qquad (2)$

Cộng các vế tương ứng của (1) và (2) ta có :

$$\sqrt[a]{3a\left(a+2b\right)}+\sqrt[b]{3bb+2a}\le 2\left(a^2+b^2\right)+2ab\le 4+2ab$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm a,b ta có:

$$4+2ab\le 4+\left(a^2+b^2\right)\le 4+2=6$$

Từ đó suy ra $\sqrt[a]{3a\left(a+2b\right)}+\sqrt[b]{3bb+2a}\le 6$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}3a=a+2b\\3b=b+2b\\a^2+b^2=2\\a=b\end{cases}\Leftrightarrow a=b=1$

❖ **Kỹ thuật tách nghịch đảo**

Từ bất đẳng thức Cauchy ta có : $a+\dfrac{1}{a}\ge 2,\forall a>0$

Để áp dụng kết quả này, với mỗi hạng tử a ta tạo ra hạng tử nghịch đảo $\dfrac{1}{a}$ và sử dụng đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân.

Ví dụ 32. Cho $a>b>0$. Chứng minh rằng: $a+\dfrac{1}{b\left(a-b\right)}\ge 3$

Giải

Ta có : $P=a+\dfrac{1}{b\left(a-b\right)}=\left(a-b\right)+b+\dfrac{1}{b\left(a-b\right)}\left(\text{vì } a>b>0 \text{ nên } P>0\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có :

$$P^3=\left[(a-b)+b+\frac{1}{b(a-b)}\right]^3 \geq 3^3.(a-b).b.\frac{1}{b(a-b)}=3^3$$

Suy ra $P \geq 3$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi $a-b=b=\frac{1}{b(a-b)} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

Ví dụ 33. Với x > 0, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q=3x^2+\frac{2}{x^3}$

Giải

Ta có $Q=x^2+x^2+x^2+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^3}.\,vì\, x>0\, nên\, Q>0$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có :

$$Q^5=\left(x^2+x^2+x^2+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)^5 \geq 5^5.x^2x^2x^2.\frac{1}{x^3}.\frac{1}{x^3}=5^5 \Rightarrow Q\geq 5, \forall x>0$$

Vậy $Q_{\min}=5\, khi\, x^2=x^2=x^2=\frac{1}{x^3}=\frac{1}{x^3}\, hay\, x=1$

❖ **Kỹ thuật ghép cặp**

Ví dụ 34.Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq a+b+c$$

(Đề thi HSG 9, TP Hồ Chí Minh, 2009)

Giải

Vì $a,b,c>0$ nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có :

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geq 2\sqrt{\frac{ab}{c}.\frac{bc}{a}}=2b \qquad (1)$$

Chứng minh tương tự ta cũng có :

$$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq 2c \qquad (2)$$

$$\frac{ab}{c}+\frac{ca}{b}\geq 2a \qquad (3)$$

Cộng ba bất đẳng thức (1)(2)(3) vế với vế ta được :

$$2\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)\geq 2a+2b+2\,hay\,\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq a+b+c$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{ab}{c}=\frac{bc}{a}=\frac{ca}{b}\,hay\,a=b=c$

- **Kỹ thuật nhân thêm hằng số**

Ví dụ 35. Với $x\geq 9$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{\sqrt{x-9}}{5x}$

Giải

Ta có $P^2=\frac{x-9}{25x^2}\Rightarrow 9P^2=\frac{9(x-9)}{25x^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có : $9(x-9)\leq\left[\frac{9+(x-9)}{2}\right]^2=\frac{x^2}{4}$

Suy ra $9P^2\leq\frac{\frac{x^2}{4}}{25x^2}=\frac{1}{100}\Rightarrow p^2\leq\left(\frac{1}{30}\right)^2\Rightarrow p\leq\frac{1}{30},\forall x\geq 9$

Vậy $P_{\min}=\frac{1}{30}\,khi\,9=x-9\,hay\,x=18$ (thỏa mãn)