Dạng 2. Chứng minh bất đẳng thức

Ví dụ 5. Cho $a,b \in R$ chứng minh rằng : $2\left(a^2+b^2\right) \geq (a+b)^2$ (1)

Giải

Xét hiệu $2\left(a^2+b^2\right)-(a+b)^2 = 2a^2+2b^2-a^2-2ab-b^2 = a^2-2ab-b^2 = (a-b)^2 \geq 0, \forall a,b$

Vậy $2\left(a^2+b^2\right) \geq (a+b)^2$

Đẳng thức xảy ra khi a = b.

Nhận xét

- Để chứng minh $A > B$ ta xét hiệu A – B và chứng tỏ $A - B > 0$
- Bất đẳng thức (1) có thể viết lại như sau :

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ và } (1a+1b) \leq \left(1^2+1^2\right)\left(a^2+b^2\right)$$

Kết quả tổng quát của bất đẳng thức này được chứng minh trong ví dụ sau đây :

Ví dụ 6. Cho bốn số a, b, c, d chứng minh rằng :

$$(ab+cd)^2 \leq \left(a^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right) \qquad (2)$$

Đẳng thức xảy ra khi $ad = bc \; hay \; \frac{a}{b} = \frac{c}{d} (\text{có } bd \neq 0)$

Giải

Ta có $(2) \Leftrightarrow a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2 \leq a^2b^2 + a^2d^2 + c^2b^2 + c^2d^2$

$$\Leftrightarrow 2abcd \leq a^2d^2 + c^2b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (ad-bc)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng với mọi a, b,c,d nên bất đẳng thức (2) cũng đúng với mọi a, b, c, d

Đẳng thức xảy ra khi $ad = bc \; hay \; \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Lưu ý khi b hoặc d = 0, hiển nhiên (2) trở thành đẳng thức. Ở đây ta xét $b,d \neq 0$

Nhận xét

Trong ví dụ trên ta đã sử dụng phương pháp biến đổi tương đương để chứng minh bất đẳng thức, dùng các phép biến đổi tương đương để đưa bất đẳng thức cần chứng minh về một bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Bất đẳng thức (2) có tên gọi là bất đẳng thức Bunhiacôpski cho hai cặp bốn số :
$(a;c)$ và $(b;d)$

Ví dụ 7. Cho ba số a,b,c thỏa mãn $-1\le a,b,c\le 4$ và $a+2b+3c\le 4$. Chứng minh rằng :
$a^2+2b^2+3c^2\le 36$.

Giải

Vì $-1\le a\le 4\Rightarrow\begin{cases}a+1\ge 0\\ a-4\le 0\end{cases}\Rightarrow(a+1)(a-4)\le 0$

$$\Leftrightarrow a^2-3a-4\le 0\Leftrightarrow a^2\le 3a+4 \qquad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=-1$ hoặc $a=4$

Chứng minh tương tự ta cũng có : $b^2\le 3b+4\Rightarrow 2b^2\le 6b+8 \qquad (2)$

Và $c^2\le 3c+4\Rightarrow 3c^2\le 9c+12 \qquad (3)$

Cộng các vế tương ứng của ba bất đẳng thức (1),(2),(3) ta được :

$$a^2+2b^2+3c^2\le 3(a+2b+3c)+24\le 3.4+24$$

$$\Rightarrow a^2+2b^2+3c^2\le 36 \text{ (đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}(a+1)(a-4)=0\\(b+1)(b-4)=0\\(c+1)(c-4)=0\\a+2b+3c=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=4\\c=-1\end{cases}$

Nhận xét

Bất đẳng thức trên là một bất đẳng thức có điều kiện, nó chỉ là bất đẳng thức khi thỏa mãn điều kiện đi kèm là $-1\le a,b,c\le 4$ và $a+2b+3c\le 4$.

Ví dụ 8. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :
$a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có :

$$a<b+c\Leftrightarrow a^2<ab+ca \qquad (1)$$

Tương tự ta cũng có : $b^2<bc+ab \qquad (2)$

$$c^2<ca+bc \qquad (3)$$

Cộng các vế tương ứng của ba bất đẳng thức 1),(2),(3) ta được : $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$

Nhận xét :

Trong ví dụ trên ta đã sử dụng các bất đẳng thức quen biết, đó là bất đẳng thức tam giác. Cách làm này gọi là phương pháp sử dụng bất đẳng thức trung gian, một phương pháp phổ biến trong chứng minh bất đẳng thức.