

➤ DẠNG TOÁN 2: GIẢI HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN.

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Giải các hệ bất phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} 5x - 2 > 4x + 5 \\ 5x - 4 < x + 2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 6x + \frac{5}{7} < 4x + 7 \\ \frac{8x + 3}{2} < 2x + 5 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 5x - 2 < 4x + 5 \\ x^2 < x + 2 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x - 1 \leq 2x - 3 \\ 3x < x + 5 \\ \frac{5 - 3x}{2} \leq x - 3 \end{cases}$$

Lời giải

a) Hệ bất phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 5x - 2 > 4x + 5 \\ 5x - 4 < x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 7 \\ x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

Suy ra hệ bất phương trình vô nghiệm.

b) Hệ bất phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 6x + \frac{5}{7} < 4x + 7 \\ \frac{8x + 3}{2} < 2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{22}{7} \\ x < \frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{7}{4}$$

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm là $x < \frac{7}{4}$

c) Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x < 7 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 7$

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm là $-1 < x < 7$.

d) Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x \geq 2 \\ x < \frac{5}{2} \\ x \geq \frac{11}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{11}{5} \leq x \leq \frac{5}{2}$

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm là $\frac{11}{5} \leq x \leq \frac{5}{2}$.

Ví dụ 2. Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 1 \leq x + 2 \\ m(m + 1)x + 4m \geq m - 2x + 3m^2 + 6 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} mx - 1 < 2 \\ mx - 2 \geq 2m + 1 \end{cases}$$

Lời giải

a) Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x \leq 3 \\ m^2 + 2x \geq 3m^2 - 4m + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq \frac{3m^2 - 4m + 6}{m^2 + 2} \end{cases}$

Suy ra hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{3m^2 - 4m + 6}{m^2 + 2} \leq 3 \Leftrightarrow m \geq 0$.

Vậy $m \geq 0$ là giá trị cần tìm.

b) Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} m^2x < m + 2 \\ m^2x \geq 4m + 1 \end{cases}$

Với $m = 0$ ta có hệ bất phương trình trở thành $\begin{cases} 0x < 2 \\ 0x \geq 1 \end{cases}$ suy ra hệ bất phương trình vô nghiệm

Với $m \neq 0$ ta có hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x < \frac{m + 2}{m^2} \\ x \geq \frac{4m + 1}{m^2} \end{cases}$

Suy ra hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{m + 2}{m^2} > \frac{4m + 1}{m^2} \Leftrightarrow m < \frac{1}{3}$

Vậy $m < \frac{1}{3}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3. Tìm m để hệ bất phương trình sau vô nghiệm.

a) $\begin{cases} x - 3 \geq x^2 + 7x + 1 \\ 2m \leq 8 + 5x \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx + 1 \leq x - 1 \\ 2x - 3 < 5x - 4 \end{cases}$

Lời giải

a) Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x \leq \frac{8}{13} \\ x \geq \frac{2m - 8}{5} \end{cases}$

Suy ra hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{8}{13} < \frac{2m - 8}{5} \Leftrightarrow m > \frac{72}{13}$

Vậy $m > \frac{72}{13}$ là giá trị cần tìm.

b) Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} m - 1 \leq x \leq -2 \\ x > \frac{14}{3} \end{cases}$

Với $m = 1$ hệ bất phương trình trở thành $\begin{cases} 0x \leq -2 \\ x > \frac{14}{3} \end{cases}$ (hệ bpt vô nghiệm)

Với $m > 1$ hệ bất phương trình $\begin{cases} x \leq \frac{-2}{m - 1} \\ x > \frac{14}{3} \end{cases}$ suy ra hệ bất phương trình vô nghiệm

$\Leftrightarrow \frac{-2}{m - 1} \leq \frac{14}{3} \Leftrightarrow -6 \leq 14 - m - 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{4}{7}$

Do đó $m > 1$ thì hệ bất phương trình vô nghiệm

Với $m < 1$ hệ bất phương trình $\begin{cases} x \geq \frac{-2}{m-1} \\ x > \frac{14}{3} \end{cases}$ (hệ bpt luôn có nghiệm)

Vậy giá trị cần tìm là $m \geq 1$.

Ví dụ 4. Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2m x + 1 \geq x + 3 \\ 4mx + 3 \geq 4x \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Lời giải

Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} 2m - 1 x \geq 3 - 2m \\ 4m - 4 x \geq -3 \end{cases}$

Giả sử hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất thì $\frac{3-2m}{2m-1} = \frac{-3}{4m-4}$

$\Leftrightarrow 8m^2 - 26m + 15 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$ hoặc $m = \frac{5}{2}$

Với $m = \frac{3}{4}$ hệ phương trình trở thành $\begin{cases} \left(\frac{3}{2} - 1\right)x \geq 3 - \frac{3}{2} \\ -x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

Với $m = \frac{5}{2}$ hệ phương trình trở thành $\begin{cases} 4x \geq -2 \\ 6x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

Vậy giá trị cần tìm là $m = \frac{3}{4}$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 4.71: Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} \frac{4x-5}{7} < x+3 \\ \frac{3x+8}{4} > 2x-5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{4}{3} - 12x \leq x + \frac{1}{2} \\ \frac{4x-3}{2} < \frac{2-x}{3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x}{2} \leq x + \frac{4}{3} \\ \frac{2x-9}{3} \geq \frac{19+x}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{11-x}{2} \geq 2x-5 \\ 2 \cdot 3x+1 \geq \frac{x-8}{2} \end{cases}$

Bài 4.72: Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm.

a) $\begin{cases} 4x-3+1 \leq 3x-3 \\ x+m > 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+5 < 3(x+4) \\ -3x-8 \geq 5x-8 \\ mx+2 < m+1 \quad x+m-2 \end{cases}$

Bài 4.73: Tìm m để hệ bất phương trình sau vô nghiệm.

a) $\begin{cases} 2x+7 \geq 8x+1 \\ m+5 < 2x \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+5 \geq x-1 \\ x+2^2 \leq x-1^2+9 \\ mx+1 > m-2 \quad x+m \end{cases}$

Bài 4.74: Tìm m để phương trình $15x^2 - 11xy + 2y^2 = -7$ có nghiệm thỏa mãn $\begin{cases} x < y \\ 2m^2x + 3my < 0 \end{cases}$.

hoc360.net