- **DẠNG TOÁN 2: SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY(côsi) ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRI LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT.**

1. Phương pháp giải.

Một số chú ý khi sử dụng bất đẳng thức côsi:

* Khi áp dụng bđt côsi thì các số phải là những số không âm

* BĐT côsi thường được áp dụng khi trong BĐT cần chứng minh có tổng và tích

* Điều kiện xảy ra dấu '=' là các số bằng nhau

* Bất đẳng thức côsi còn có hình thức khác thường hay sử dụng

Đối với hai số: $x^2+y^2\ge 2xy;\quad x^2+y^2\ge \dfrac{(x+y)^2}{2};\quad xy\le \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2.$

Đối với ba số: $abc\le \dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}$, $abc\le \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3$

2. Các ví dụ minh họa.

Loại 1: Vận dụng trực tiếp bất đẳng thức côsi

Ví dụ 1: Cho a,b là số dương thỏa mãn $a^2+b^2=2$. Chứng minh rằng

a) $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}\right)\ge 4$ b) $(a+b)^5\ge 16ab\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\ge 2\sqrt{\dfrac{a}{b}.\dfrac{b}{a}}=2,\ \dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}\ge 2\sqrt{\dfrac{a}{b^2}.\dfrac{b}{a^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{ab}}$

Suy ra $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}\right)\ge \dfrac{4}{\sqrt{ab}}$ (1)

Mặt khác ta có $2=a^2+b^2\ge 2\sqrt{a^2b^2}=2ab\Rightarrow ab\le 1$ (1)

Từ (1) và (2) suy ra $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}\right)\ge 4$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.

b) Ta có $(a+b)^5=(a^2+2ab+b^2)(a^3+3ab^2+3a^2b+b^3)$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$a^2+2ab+b^2\ge 2\sqrt{2ab(a^2+b^2)}=4\sqrt{ab}$ và

$(a^3+3ab^2)+(3a^2b+b^3)\ge 2\sqrt{(a^3+3ab^2)(3a^2b+b^3)}=4\sqrt{ab(1+b^2)(a^2+1)}$

Suy ra $(a^2+2ab+b^2)(a^3+3ab^2+3a^2b+b^3)\ge 16ab\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}$

Do đó $(a+b)^5\ge 16ab\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.

Ví dụ 2: Cho a,b,c là số dương. Chứng minh rằng

a) $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{c}\right)\left(c+\dfrac{1}{a}\right)\ge 8$

b) $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\ge 6abc$

c) $(1+a)(1+b)(1+c)\ge \left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3$

d) $a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ac}+c^2\sqrt{ab}\le a^3+b^3+c^3$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có

$a+\dfrac{1}{b}\ge 2\sqrt{\dfrac{a}{b}},\ b+\dfrac{1}{c}\ge 2\sqrt{\dfrac{b}{c}},\ c+\dfrac{1}{a}\ge 2\sqrt{\dfrac{c}{a}}$

Suy ra $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{c}\right)\left(c+\dfrac{1}{a}\right)\ge 8\sqrt{\dfrac{a}{b}}.\sqrt{\dfrac{b}{c}}.\sqrt{\dfrac{c}{a}}=8$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

b) Áp dụng BĐT côsi cho hai số dương ta có

$1+a^2\ge 2\sqrt{a^2}=2a$, tương tự ta có $1+b^2\ge 2b,\ 1+c^2\ge 2c$

Suy ra $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\ge 2\ \ a^2b+b^2c+c^2a$

Mặt khác, áp dụng BĐT côsi cho ba số dương ta có

$a^2b+b^2c+c^2a\ge 3\sqrt{a^2b.b^2c.c^2a}=3abc$

Suy ra $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\ge 6abc$. ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

c) Ta có $(1+a)(1+b)(1+c)=1+\ \ ab+bc+ca\ \ +\ \ a+b+c\ \ +abc$

Áp dụng BĐT côsi cho ba số dương ta có

$ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{ab.bc.ca}=3\ \ \sqrt[3]{abc}\ \ ^2$ và $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$

Suy ra $(1+a)(1+b)(1+c)\ge 1+3\ \ \sqrt[3]{abc}\ \ ^2+3\sqrt[3]{abc}+abc=\ \ 1+\sqrt[3]{abc}\ \ ^3$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

d) Áp dụng BĐT côsi cho hai số dương ta có

$a^2\sqrt{bc}\le a^2\left(\dfrac{b+c}{2}\right),\ b^2\sqrt{ac}\le b^2\left(\dfrac{a+c}{2}\right),\ c^2\sqrt{ab}\le c^2\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

Suy ra $a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ac}+c^2\sqrt{ab}\le \dfrac{a^2b+b^2a+a^2c+c^2a+b^2c+c^2b}{2}$ (1)

Mặt khác theo BĐT côsi cho ba số dương ta có

$a^2b\le \dfrac{a^3+a^3+b^3}{3},\ b^2a\le \dfrac{b^3+b^3+a^3}{3},\ a^2c\le \dfrac{a^3+a^3+c^3}{3},$

$c^2a\le \dfrac{c^3+c^3+a^3}{3},\ b^2c\le \dfrac{b^3+b^3+c^3}{3},\ c^2b\le \dfrac{c^3+c^3+b^3}{3}$

Suy ra $a^2b+b^2a+a^2c+c^2a+b^2c+c^2b\le 2\ \ a^3+b^3+c^3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ac}+c^2\sqrt{ab}\le a^3+b^3+c^3$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 3: Cho a,b,c,d là số dương. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{a+b+c+d}{4}\ge \sqrt[4]{abcd}$

b) $\left(\dfrac{a}{b^3}+\dfrac{b}{c^3}+\dfrac{c}{d^3}+\dfrac{d}{a^3}\right)\ a+b\ \ \ b+c\ \ \ge 16$

c) $\dfrac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}+\dfrac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 4.$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có

$a+b\ge 2\sqrt{ab}, c+d\ge 2\sqrt{cd}$ và $\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\ge 2\sqrt{\sqrt{ab}.\sqrt{cd}}=2\sqrt[4]{abcd}$

Suy ra $\dfrac{a+b+c+d}{4}\ge\dfrac{2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd}}{4}\ge\sqrt[4]{abcd}$ ĐPCM.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d$.

b) Áp dụng câu a) ta có

$\dfrac{a}{b^3}+\dfrac{b}{c^3}+\dfrac{c}{d^3}+\dfrac{d}{a^3}\ge 4\sqrt[4]{\dfrac{a}{b^3}.\dfrac{b}{c^3}.\dfrac{c}{d^3}.\dfrac{d}{a^3}}=\dfrac{4}{\sqrt{abcd}}$

Suy ra $\left(\dfrac{a}{b^3}+\dfrac{b}{c^3}+\dfrac{c}{d^3}+\dfrac{d}{a^3}\right)(a+b)(c+d)\ge\dfrac{4}{\sqrt{abcd}}.2\sqrt{ab}.2\sqrt{cd}=16$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d$.

c) Áp dụng câu a) ta có

$VT=3.\dfrac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}+\dfrac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 4\sqrt[4]{\left(\dfrac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}\right)^3\dfrac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}=4\sqrt[4]{\dfrac{8(a+b+c)}{27(a+b)(b+c)(}}$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh $4\sqrt[4]{\dfrac{8(a+b+c)^3}{27(a+b)(b+c)(c+a)}}\ge 4$

$\Leftrightarrow 8(a+b+c)^3\ge 27(a+b)(b+c)(c+a)$ (*)

Áp dụng BĐT côsi cho ba số ta có

$(a+b)(b+c)(c+a)\le\left(\dfrac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\right)^3=\dfrac{8(a+b+c)^3}{27}$

Suy ra BĐT (*) đúng nên BĐT ban đầu đúng. ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét: BĐT câu a) là bất đẳng côsi cho bốn số không âm. Ta có BĐT côsi cho n số không âm như sau: Cho n số không âm a_i, $i=1,2,...,n$.

Khi đó ta có $\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$.

Ví dụ 4: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

a) $a^2b+b^2c+c^2a\le 3$

b) $\dfrac{ab}{3+c^2}+\dfrac{bc}{3+a^2}+\dfrac{ca}{3+b^2}\le\dfrac{3}{4}$

Lời giải

a) Ta có $(a^2+b^2+c^2)^2=9\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2b^2=9$ (1)

Áp dụng BĐT côsi ta có $a^4+b^4\ge 2a^2b^2$, $b^4+c^4\ge 2b^2c^2$, $c^4+a^4\ge 2c^2a^2$

Cộng vế với vế lại ta được $a^4+b^4+c^4\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le 3$ (3)

Áp dụng BĐT côsi ta có

$a^2 + a^2b^2 \ge 2\sqrt{a^2.a^2b^2} = 2a^2b$, tương tự ta có $b^2 + b^2c^2 \ge 2b^2c,\ c^2 + c^2a^2 \ge 2c^2a$

Cộng vế với vế ta được $a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \ge 2\ \ a^2b + b^2c + c^2a$ (4)

Từ giả thiết và (3), (4) suy ra $a^2b + b^2c + c^2a \le 3$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

b) Áp dụng BĐT côsi ta có

$$3 + a^2 = 3 + \ \ 3 - b^2 - c^2 \ \ = \ \ 3 - b^2 \ \ + \ \ 3 - c^2 \ \ \ge 2\sqrt{\ 3 - b^2 \ \ \ 3 - c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{bc}{3 + a^2} \le \frac{bc}{2\sqrt{\ 3 - b^2 \ \ \ 3 - c^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{3 - c^2}.\frac{c^2}{3 - b^2}} \le \frac{1}{4}\left(\frac{b^2}{3 - c^2} + \frac{c^2}{3 - b^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{b^2}{b^2 + a^2} + \frac{c^2}{c^2 + a^2}\right)$$

Tương tự ta có $\frac{ab}{3 + c^2} \le \frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{a^2 + c^2} + \frac{b^2}{b^2 + c^2}\right), \frac{ca}{3 + b^2} \le \frac{1}{4}\left(\frac{c^2}{c^2 + b^2} + \frac{a^2}{a^2 + b^2}\right)$

Cộng vế với vế ta được $\frac{ab}{3 + c^2} + \frac{bc}{3 + a^2} + \frac{ca}{3 + b^2} \le \frac{3}{4}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Loại 2: Kĩ thuật tách, thêm bớt, ghép cặp.

- Để chứng minh BĐT ta thường phải biến đổi (nhân chia, thêm, bớt một biểu thức) để tạo biểu thức có thể giản ước được sau khi áp dụng BĐT côsi.
- Khi gặp BĐT có dạng $x + y + z \ge a + b + c$ (hoặc $xyz \ge abc$), ta thường đi chứng minh $x + y \ge 2a$ (hoặc $ab \le x^2$), xây dựng các BĐT tương tự rồi cộng(hoặc nhân) vế với vế ta suy ra điều phải chứng minh.
- Khi tách và áp dụng BĐT côsi ta dựa vào việc đảm bảo dấu bằng xảy ra(thường dấu bằng xảy ra khi các biến bằng nhau hoặc tại biên).

Ví dụ 5: Cho a, b, c là số dương. Chứng minh rằng:

a) $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \ge a + b + c$ b) $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \ge 2\sqrt{\frac{ab}{c}.\frac{bc}{a}} = 2b$

Tương tự ta có $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \ge 2c,\ \frac{ac}{b} + \frac{ba}{c} \ge 2a$.

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$2\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b}\right) \ge 2\ \ a + b + c \ \ \Leftrightarrow \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \ge a + b + c$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

b) Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{a}{b^2} + \frac{1}{a} \ge 2\sqrt{\frac{a}{b^2}.\frac{1}{a}} = \frac{2}{b}$

Tương tự ta có $\frac{b}{c^2} + \frac{1}{b} \ge \frac{2}{c},\ \frac{c}{a^2} + \frac{1}{c} \ge \frac{2}{a}$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \Leftrightarrow \frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Ví dụ 6: Cho a, b, c dương sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{a^3b^3}{c} + \dfrac{b^3c^3}{a} + \dfrac{c^3a^3}{b} \geq 3abc$

b) $\dfrac{ab}{c} + \dfrac{bc}{a} + \dfrac{ca}{b} \geq 3$.

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có $\dfrac{a^3b^3}{c} + \dfrac{b^3c^3}{a} \geq 2\sqrt{\dfrac{a^3b^3}{c}.\dfrac{b^3c^3}{a}} = 2b^3ac$

Tương tự ta có $\dfrac{b^3c^3}{a} + \dfrac{c^3a^3}{b} \geq 2abc^3,\ \dfrac{c^3a^3}{b} + \dfrac{a^3b^3}{c} \geq 2a^3bc$

Cộng vế với vế ta có $2\left(\dfrac{a^3b^3}{c} + \dfrac{b^3c^3}{a} + \dfrac{c^3a^3}{b}\right) \geq 2abc\ \ a^2 + b^2 + c^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^3b^3}{c} + \dfrac{b^3c^3}{a} + \dfrac{c^3a^3}{b} \geq 3abc$. ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

b) BĐT tương đương với $\left(\dfrac{ab}{c} + \dfrac{bc}{a} + \dfrac{ca}{b}\right)^2 \geq 9$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{ab}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{bc}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{ca}{b}\right)^2 + 2\ \ a^2 + b^2 + c^2\ \ \geq 9 \Leftrightarrow \left(\dfrac{ab}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{bc}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{ca}{b}\right)^2 \geq 3$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\left(\dfrac{ab}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{bc}{a}\right)^2 \geq 2\sqrt{\left(\dfrac{ab}{c}\right)^2.\left(\dfrac{bc}{a}\right)^2} = 2b^2$

Tương tự ta có $\left(\dfrac{bc}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{ca}{b}\right)^2 \geq 2c^2,\ \left(\dfrac{ca}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{ab}{c}\right)^2 \geq 2a^2$

Cộng vế với vế và rút gọn ta được $\left(\dfrac{ab}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{bc}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{ca}{b}\right)^2 \geq 3$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 7: Cho a, b, c là số dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

a) $8\ \ a+b\ \ b+c\ \ c+a\ \ \leq\ \ 3+a\ \ 3+b\ \ 3+c$

b) $\ 3-2a\ \ 3-2b\ \ 3-2c\ \ \leq abc$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có

$$a+b\ \ b+c\ \ \leq \left(\frac{a+b\ \ +\ \ b+c}{2}\right)^2 = \frac{3+a^{\ 2}}{4}$$

Tương tự ta có $\ b+c\ \ c+a\ \ \leq \dfrac{3+c^{\ 2}}{4},\ \ c+a\ \ a+b\ \ \leq \dfrac{3+a^{\ 2}}{4}$

Nhân vế với vế lại ta được $\left[\ a+b\ \ b+c\ \ c+a\ \right]^2 \leq 64\left[\ 3+a\ \ 3+b\ \ 3+c\ \right]^2$

Suy ra $8\ \ a+b\ \ b+c\ \ c+a\ \ \leq\ \ 3+a\ \ 3+b\ \ 3+c$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

b) * TH1: Với $3-2a \quad 3-2b \quad 3-2c \quad \le 0$: BĐT hiển nhiên đúng.

* TH2: Với $3-2a \quad 3-2b \quad 3-2c \quad > 0$:

+ Nếu cả ba số $3-2a$, $3-2b$, $3-2c$ đều dương. Áp dụng BĐT côsi ta có

$3-2a \quad 3-2b \quad \le \left(\dfrac{3-2a \quad + \quad 3-2b}{2}\right)^2 = c^2$, tương tự ta có

$3-2b \quad 3-2c \quad \le a^2, \quad 3-2c \quad 3-2a \quad \le b^2$

Nhân vế với vế ta được $\left[\ 3-2a \quad 3-2b \quad 3-2c\ \right]^2 \le a^2b^2c^2$

Hay $3-2a \quad 3-2b \quad 3-2c \quad \le abc$.

+ Nếu hai trong ba số $3-2a$, $3-2b$, $3-2c$ âm và một số dương. Không mất tính tổng quát giả sử $3-2a < 0, 3-2b < 0$ suy racó $6-2a-2b < 0 \Leftrightarrow c < 0$ (không xảy ra)

Vậy BĐT được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Ví dụ 8: Cho a, b, c là số dương. Chứng minh rằng $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b} \ge \dfrac{a+b+c}{2}$.

Lời giải

Áp dụng BĐT Côsi cho hai số thực dương ta có :

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \ge 2\sqrt{\frac{a^2}{b+c}.\frac{b+c}{4}} = a.$$

Tương tự ta có $\dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c+a}{4} \ge b; \dfrac{c^2}{a+b} + \dfrac{a+b}{4} \ge c$.

Cộng ba BĐT này lại với nhau ta đươc :

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b+c}{2} \ge a+b+c$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \ge \frac{a+b+c}{2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Lưu ý :Việc ta ghép $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b+c}{4}$ và đánh giá như trên là vì những lí do sau:

Thứ nhất là ta cần làm mất mẫu số ở các đại lượng vế trái (vì vế phải không có phân số), chẳng hạn đại lượng $\dfrac{a^2}{b+c}$ khi đó ta sẽ áp dụng BĐT côsi cho đại lượng đó với một đại lượng chứa $b+c$.

Thứ hai là ta cần lưu ý tới điều kiện xảy ra đẳng thức ở BĐT côsi là khi hai số đó bằng nhau. Ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$ khi đó $\dfrac{a^2}{b+c} = \dfrac{a}{2}$ và $b+c = 2a$ do đó ta ghép như trên.

Ví dụ 9: Cho a, b, c là số dương thỏa mãn $a+b+c = 3$. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{a}{\sqrt{b+1}} + \dfrac{b}{\sqrt{c+1}} + \dfrac{c}{\sqrt{a+1}} \ge \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

b) $\sqrt{\dfrac{a^3}{b+3}} + \sqrt{\dfrac{b^3}{c+3}} + \sqrt{\dfrac{c^3}{a+3}} \ge \dfrac{3}{2}$

Lời giải

a) Đặt $P=\dfrac{a}{\sqrt{b+1}}+\dfrac{b}{\sqrt{c+1}}+\dfrac{c}{\sqrt{a+1}}$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{a}{\sqrt{b+1}}+\frac{a}{\sqrt{b+1}}+\frac{\sqrt{2}a(b+1)}{4}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b+1}}.\frac{a}{\sqrt{b+1}}.\frac{\sqrt{2}a(b+1)}{4}}=\frac{3\sqrt{2}a}{2}$$

Tương tự ta có

$$\frac{b}{\sqrt{c+1}}+\frac{b}{\sqrt{c+1}}+\frac{\sqrt{2}b(c+1)}{4}\ge\frac{3\sqrt{2}b}{2},\ \frac{c}{\sqrt{a+1}}+\frac{c}{\sqrt{a+1}}+\frac{\sqrt{2}c(a+1)}{4}\ge\frac{3\sqrt{2}c}{2}$$

Cộng vế với vế ba BĐT trên ta được

$$2P+\frac{\sqrt{2}}{4}(ab+bc+ca+a+b+c)\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow P\ge\frac{15\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}(ab+bc+ca)\quad(\text{vì } a+b+c=3)$$

Mặt khác ta có $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$ (theo ví dụ 1)

Do đó $ab+bc+ca\le 3$

Suy ra $\Leftrightarrow P\ge\dfrac{15\sqrt{2}}{8}-\dfrac{\sqrt{2}}{8}.3=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

b) Đặt $Q=\sqrt{\dfrac{a^3}{b+3}}+\sqrt{\dfrac{b^3}{c+3}}+\sqrt{\dfrac{c^3}{a+3}}$

Ta có $Q=\dfrac{a^2}{\sqrt{a(b+3)}}+\dfrac{b^2}{\sqrt{b(c+3)}}+\dfrac{c^2}{\sqrt{c(a+3)}}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $4\sqrt{a(b+3)}=2\sqrt{4a(b+3)}\le 4a+b+3$

Suy ra $\dfrac{a^2}{\sqrt{a(b+3)}}\ge\dfrac{4a^2}{4a+b+3}$, tương tự ta có

$$\frac{b^2}{\sqrt{b(c+3)}}\ge\frac{4b^2}{4b+c+3},\ \frac{c^2}{\sqrt{c(a+3)}}\ge\frac{4c^2}{4c+a+3}$$

Cộng vế với vế lại ta được $Q\ge\dfrac{4a^2}{4a+b+3}+\dfrac{4b^2}{4b+c+3}+\dfrac{4c^2}{4c+a+3}=L$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{4a^2}{4a+b+3}+\frac{1}{16}(4a+b+3)\ge 2\sqrt{\frac{4a^2}{4a+b+3}.\frac{1}{16}(4a+b+3)}=a$$

Tương tự ta có

$$\frac{4b^2}{4b+c+3}+\frac{1}{16}(4b+c+3)\ge b,\ \frac{4c^2}{4c+a+3}+\frac{1}{16}(4c+a+3)\ge c$$

Cộng vế với vế lại ta được $L+\dfrac{1}{16}\left[5(a+b+c)+9\right]\ge a+b+c$

Vì $a+b+c=3$ nên $L \ge \frac{3}{2}$ suy ra $Q \ge \frac{3}{2}$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Ví dụ 10: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3 \ge 2(a+b+c).$$

Lời giải

Ta có $\left[(a-1)(b-1)\right]\left[(b-1)(c-1)\right]\left[(c-1)(a-1)\right]=(a-1)^2(b-1)^2(c-1)^2 \ge 0$

Do đó không mất tính tổng quát giả sử

$(a-1)(b-1) \ge 0 \Leftrightarrow ab+1 \ge a+b \Leftrightarrow 2(ab+c+1) \ge 2(a+b+c)$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3 \ge 2(ab+c+1)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+1 \ge 2(ab+c)$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \ge \frac{2}{ab}=2c,\ \frac{1}{c^2}+1 \ge \frac{2}{c}=2ab$ (do $abc=1$)

Cộng vế với vế ta được $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+1 \ge 2(ab+c)$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Ví dụ 11: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

a) $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x-2}$ với $x>2$

b) $g(x)=2x+\frac{1}{(x+1)^2}$ với $x>-1$

c) $h(x)=x+\frac{3}{x}$ với $x \ge 2$

d) $k(x)=2x+\frac{1}{x^2}$ với $0<x \le \frac{1}{2}$.

Lời giải

a) Ta có $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-2}=x-2+\frac{1}{x-2}+2$

Do $x>2$ nên $x-2>0,\ \frac{1}{x-2}>0$. Áp dụng BĐT côsi ta có

$x-2+\frac{1}{x-2} \ge 2\sqrt{(x-2).\frac{1}{x-2}}=2$

Suy ra $f(x) \ge 4$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x-2=\frac{1}{x-2} \Leftrightarrow (x-2)^2=1 \Leftrightarrow x=1$ (loại) hoặc $x=3$ (thỏa mãn)

Vậy $\min f(x)=4$ khi và chỉ khi $x=3$.

b) Do $x>-1$ nên $x+1>0$. Áp dụng BĐT côsi ta có

$g(x)=(x+1)+(x+1)+\frac{1}{(x+1)^2}-2 \ge 3\sqrt[3]{(x+1).(x+1).\frac{1}{(x+1)^2}}-2=1$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x+1=\dfrac{1}{\left(x+1\right)^2} \Leftrightarrow \left(x+1\right)^3=1 \Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn)

Vậy $\min g\left(x\right)=1$ khi và chỉ khi $x=0$.

c) Ta có $h\left(x\right)=\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{3x}{4}\right)+\dfrac{x}{4}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\dfrac{3}{x}+\dfrac{3x}{4}\ge 2\sqrt{\dfrac{3}{x}.\dfrac{3x}{4}}=3$

Mặt khác $x\ge 2$ suy ra $h\left(x\right)=\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{3x}{4}\right)+\dfrac{x}{4}\ge 3+\dfrac{2}{4}=\dfrac{7}{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{3}{x}=\dfrac{3x}{4}\\ x=2\end{cases} \Leftrightarrow x=2$

Vậy $\min h\left(x\right)=\dfrac{7}{2}$ khi và chỉ khi $x=2$.

d) Ta có $k\left(x\right)=x+x+\dfrac{1}{8x^2}+\dfrac{7}{8x^2}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $x+x+\dfrac{1}{8x^2}\ge 3\sqrt[3]{x.x.\dfrac{1}{8x^2}}=\dfrac{3}{2}$

Mặt khác $0<x\le \dfrac{1}{2}\Rightarrow \dfrac{7}{8x^2}\ge \dfrac{7}{2}$ suy ra $k\left(x\right)\ge \dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{2}=5$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1}{8x^2}\\ x=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Vậy $\min k\left(x\right)=5$ khi và chỉ khi $x=\dfrac{1}{2}$.

Loại 3: Kĩ thuật tham số hóa

Nhiều khi không dự đoán được dấu bằng xảy ra(để tách ghép cho hợp lí) chúng ta cần đưa tham số vào rồi chọn sau sao cho dấu bằng xảy ra.

Ví dụ 12: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $A=\left(1+2a\right)\left(1+2bc\right)$

Phân tích

Rõ ràng ta sẽ đánh giá biểu thức A để làm xuất hiện $a^2+b^2+c^2$.

Trước tiên ta sẽ đánh giá a qua a^2 bởi $a^2+m^2\ge 2ma \Rightarrow 2a\le \dfrac{a^2}{m}+m$ (với $m>0$)

Do b,c bình đẳng nên dự đoán dấu bằng A đạt giá trị nhỏ nhất khi $b=c$ nên ta đánh giá $2bc\le b^2+c^2$. Suy ra $A\le \left(\dfrac{a^2}{m}+m+1\right)\left(1+b^2+c^2\right)=B$. Tiếp tục ta sẽ sử dụng BĐT côsi dưới dạng $xy\le \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$ để là xuất hiện $a^2+b^2+c^2$ nên ta sẽ tách như sau

$$B = \frac{1}{m} \ a^2 + m^2 + m \quad 1 + b^2 + c^2 \quad \le \frac{1}{m}\left(\frac{a^2 + m^2 + m \quad + \quad 1 + b^2 + c^2}{2}\right)^2$$

Suy ra $A \le \frac{1}{4m} \ m^2 + m + 2 \ ^2$

Dấu bằng xảy ra khi $a = m,\, b = c, a^2 + m^2 + m = 1 + b^2 + c^2$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Từ đây ta có $m = \frac{2}{3}$. Do đó ta có lời giải như sau:

Lời giải

Áp dụng BĐT côsi ta có $a^2 + \frac{4}{9} \ge \frac{4}{3}a \Rightarrow 2a \le \frac{3a^2}{2} + \frac{2}{3}$ và $2bc \le b^2 + c^2$

Suy ra $A \le \left(\frac{3a^2}{2} + \frac{2}{3} + 1\right) \ b^2 + c^2 + 1$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\left(\frac{3a^2}{2} + \frac{2}{3} + 1\right) \ b^2 + c^2 + 1 \ = \frac{3}{2}\left(a^2 + \frac{10}{9}\right) \ b^2 + c^2 + 1 \ \le \frac{3}{2}\left(\frac{a^2 + \frac{10}{9} + b^2 + c^2 + 1}{2}\right)^2 = \frac{98}{27}$$

Suy ra $A \le \frac{98}{27}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = c \\ a^2 + \frac{10}{9} = b^2 + c^2 + 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = c = \sqrt{\frac{5}{18}} \end{cases}$

Vậy $\max A = \frac{98}{27}$ khi và chỉ khi $a = \frac{2}{3}$ và $b = c = \sqrt{\frac{5}{18}}$.

Ví dụ 13: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $2a + 4b + 3c^2 = 68$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = a^2 + b^2 + c^3$.

Phân tích

Ta cần đánh giá biểu thức A qua biểu thức $2a + 4b + 3c^2$. Do đó ta sẽ cho thêm vào các tham số vào và đánh giá như sau (m,n,p dương)

$a^2 + m^2 \ge 2am,\, b^2 + n^2 \ge 2bn$ và $\frac{c^3}{2} + \frac{c^3}{2} + 4p^3 \ge 3pc^2$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^3 + m^2 + n^2 + 4p^3 \ge 2am + 2bn + 3pc$ (*)

Để $2am + 2bn + 3pc^2$ có thể bội số của $2a + 4b + 3c^2$ thì

$\frac{2m}{2} = \frac{2n}{4} = \frac{3p}{3} \Leftrightarrow m = \frac{n}{2} = p$

Mặt khác dấu bằng ở BĐT (*) xảy ra khi $a = m, b = n, c = 2p$

Hay $a = m, b = 2m, c = 2m \Rightarrow 2m + 4.\ \ 2m \ \ + 3\ \ 2m \ ^2 = 68$

$\Leftrightarrow 12m^2+10m-68=0 \Leftrightarrow m=2$ (nhận) hoặc $m=-\dfrac{17}{6}$ (loại)

Suy ra $p=2, n=4$ do đó ta có lời giải như sau

Lời giải

Áp dụng bĐT côsi ta có

$a^2+4\ge 4a,\ b^2+16\ge 8b$ và $\dfrac{c^3}{2}+\dfrac{c^3}{2}+32\ge 6c^2$

Cộng vế với vế ta được

$a^2+b^2+c^3+52\ge 4a+8b+6c^2$, kết hợp với $2a+4b+3c^2=68$

Suy ra $a^2+b^2+c^3\ge 84$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=2, b=4, c=4$

Vậy $\min \mathrm{A}=84 \Leftrightarrow a=2, b=4, c=4$.

Ví dụ 14: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

a) $A=\dfrac{x^2-x+3}{\sqrt{1-x^3}}$ với $x<1$

b) $B=\sqrt{-x^2+4x+21}-\sqrt{-x^2+3x+10}$ với $-2\le x\le 5$.

Lời giải

a) Ta có $A=\dfrac{x^2-x+3}{\sqrt{(1-x)(x^2+x+1)}}$

Áp dụng BĐT côsi cho hai số dương ta có

$$\sqrt{(1-x)(x^2+x+1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2(1-x)}.\sqrt{x^2+x+1}\le \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2(1-x)+x^2+x+1}{2}=\frac{x^2-x+3}{2\sqrt{2}}$$

Suy ra $A\ge \dfrac{x^2-x+3}{\dfrac{x^2-x+3}{2\sqrt{2}}}=2\sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2(1-x)=x^2+x+1 \Leftrightarrow x^2+3x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$

Vậy $\min\limits_{x<1}\mathrm{A}=2\sqrt{2}$ khi $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$

b) Ta có $B=\dfrac{x+11}{\sqrt{-x^2+4x+21}+\sqrt{-x^2+3x+10}}=\dfrac{x+11}{\sqrt{(x+3)(7-x)}+\sqrt{(x+2)(5-x)}}$

Với $-2\le x\le 5$ thì $x+11$; $x+3$; $7-x$; $x+2$; $5-x$ là các số không âm nên theo BĐT côsi ta có :

$$\sqrt{(x+3)(7-x)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(2x+6)(7-x)}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(2x+6)+(7-x)}{2}\right)=\frac{x+13}{2\sqrt{2}} \quad (1)$$

$$\sqrt{(x+2)(5-x)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(2x+4)(5-x)}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(2x+4)+(5-x)}{2}\right)=\frac{x+9}{2\sqrt{2}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\sqrt{(x+3)(7-x)}+\sqrt{(x+2)(5-x)}\le\dfrac{x+11}{\sqrt{2}}$, từ đó ta có $B\ge\sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ (1) và (2) đồng thời xảy ra dấu bằng $\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$.

Vậy $\min\limits_{-2\le x\le 5} B=\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$.

Loại 4: Kĩ thuật côsi ngược dấu.

Ví dụ 15: Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P=\frac{\sqrt{bc}}{a+2\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{ca}}{b+2\sqrt{ca}}+\frac{\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}}\ .$$

Lời giải

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{\sqrt{bc}}{a+2\sqrt{bc}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{a+2\sqrt{bc}}\right)\le\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{a+b+c}\right)$

Tương tự ta có $\frac{\sqrt{ca}}{b+2\sqrt{ca}}\le\frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{a+b+c}\right),\ \frac{\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}}\le\frac{1}{2}\left(1-\frac{c}{a+b+c}\right)$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$$P\le\frac{1}{2}\left(3-\frac{a}{a+b+c}-\frac{b}{a+b+c}-\frac{c}{a+b+c}\right)=1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Vậy $\min P=1\Leftrightarrow a=b=c$

Ví dụ 16: Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

a) $\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge\frac{3}{2}$.

b) $\frac{a^2}{a+2b^3}+\frac{b^2}{b+2c^3}+\frac{c^2}{c+2a^3}\ge 1$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có:

$$\frac{a}{1+b^2}=\frac{a\ \ 1+b^2\ -b^2}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$$

Tương tự ta có $\frac{b}{1+c^2}\ge b-\frac{bc}{2}$ và $\frac{c}{1+a^2}\ge c-\frac{ca}{2}$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2}=3-\frac{ab+bc+ca}{2}$$

Mặt khác ta có $\ a+b+c\ ^2\ge 3\ \ ab+bc+ca\ \ \Rightarrow ab+bc+ca\le 3$.

Do đó $\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge 3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

b) Theo bất đẳng thức Côsi ta có :

$$\frac{a^2}{a+2b^3}=\frac{a\ \ a+2b^3\ -2ab^3}{a+2b^3}\ge a-\frac{2ab^3}{3\sqrt[3]{ab^6}}=a-\frac{2b\sqrt[3]{a^2}}{3}.$$

Tương tự ta có $\frac{b^2}{b+2c^3}\ge b-\frac{2c\sqrt[3]{b}}{3},\ \frac{c^2}{c+2a^3}\ge c-\frac{2a\sqrt[3]{c}}{3}$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được:

$$\frac{a^2}{a+2b^3}+\frac{b^2}{b+2c^3}+\frac{c^2}{c+2a^3}\ge a+b+c-\frac{2}{3}\ b\sqrt[3]{a^2}+a\sqrt[3]{c^2}+c\sqrt[3]{b^2}$$

Mặt khác $a+b+c=3$ do đó ta chỉ cần chứng minh: $b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{c^2}\le 3$.

Thật vậy, theo bất đẳng thức Côsi ta có :

$$b\sqrt[3]{a^2}\le \frac{1}{3}b.\ a+a+1\ =\frac{2ab+b}{3}$$

Tương tự ta có $c\sqrt[3]{b^2}\le \frac{2bc+c}{3}$, $a\sqrt[3]{c^2}\le \frac{2ca+a}{3}$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta có:

$$b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{c^2}\le \frac{2ab+b}{3}+\frac{2bc+c}{3}+\frac{2ca+a}{3}=\frac{2}{3}\ ab+bc+ca\ +\frac{1}{3}\ a+b+c$$

Từ đó suy ra: $b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{c^2}\le \frac{2}{3}.3+\frac{1}{3}.3=3$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 17: Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$.

Chứng minh rằng $\frac{c}{1+ab}+\frac{b}{1+ac}+\frac{a}{1+bc}\ge 1$

Lời giải

Đặt $P=\frac{c}{1+ab}+\frac{b}{1+ac}+\frac{a}{1+bc}$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{c}{1+ab}=c-\frac{abc}{1+ab}\ge c-\frac{abc}{2\sqrt{ab}}=c-\frac{\sqrt{ca\quad cb}}{2}\ge c-\frac{ca+cb}{4}$$

Tương tự ta ta có $\frac{b}{1+ac}\ge b-\frac{ba+bc}{4}$, $\frac{a}{1+bc}\le a-\frac{ab+ac}{4}$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được:

$$P\ge a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2}$$

Mặt khác $a^2+b^2+c^2=1\Rightarrow\ a+b+c\ ^2=1+2\ ab+bc+ca$ (*)

Hay $ab+bc+ca=\frac{a+b+c\ ^2-1}{2}$

Suy ra $P\ge a+b+c-\frac{a+b+c\ ^2-1}{4}=\frac{(a+b+c-1)(3-a-b-c)}{4}+1$ (1)

Từ giả thiết ta có $a,b,c\in[0;1]\Rightarrow 3-a-b-c\ge 0$ (2)

Và từ (*) suy ra $a+b+c\ge 1$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $P\ge 1$. ĐPCM

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi trong ba số a, b, c có một số bằng 1 và hai số còn lại bằng 0.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 4.6: Cho x,y,z dương. Chứng minh rằng $\frac{2\sqrt{x}}{x^3+y^2}+\frac{2\sqrt{y}}{y^3+z^2}+\frac{2\sqrt{z}}{z^3+x^2}\le\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$.

Bài 4.7: Cho các số dương *x, y, z* thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \ge 3\sqrt{3}$$

Bài 4.8: Với các số dương *a, b, c, d* sao cho: $\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}+\dfrac{d}{1+d}=1$

Chứng minh rằng: $abcd \le \dfrac{1}{81}$

Bài 4.9: Với các số dương *a, b, c* sao cho: $\dfrac{a}{1+b}+\dfrac{b}{1+c}+\dfrac{c}{1+a}=1$

Chứng minh rằng: $\left(\dfrac{1+b}{a}-1\right)\left(\dfrac{1+c}{b}-1\right)\left(\dfrac{1+a}{c}-1\right) \ge 8$

Bài 4.10: Cho ba số dương x,y,z thoả mãn hệ thức $xyz\ \ x+y+z\ \ =1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\ \ x\ +\ y\ \ \ x\ +\ z\ \ $.

Bài 4.11: Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}} \le \dfrac{3}{2}$.

Bài 4.12: Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$\dfrac{ab}{\sqrt{c+ab}}+\dfrac{bc}{\sqrt{a+bc}}+\dfrac{ca}{\sqrt{b+ca}} \le \dfrac{1}{2}$.

Bài 4.13: Cho ba số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng $1+\dfrac{3}{ab+bc+ca} \ge \dfrac{6}{a+b+c}$.

Bài 4.14: Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$.

Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{a\ \ 1+b}+\dfrac{1}{b\ \ 1+c}+\dfrac{1}{c\ \ 1+a} \ge \dfrac{3}{2}$

Bài 4.15: Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{\dfrac{a+b}{2ab}}+\sqrt{\dfrac{b+c}{2bc}}+\sqrt{\dfrac{c+a}{2ca}} \ge 3$.

Bài 4.16: Cho ba số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

$\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\left(1+\dfrac{b}{c}\right)\left(1+\dfrac{c}{a}\right) \ge 2\left(1+\dfrac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$.

Bài 4.17: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{2a}{2b+2c-a}}+\sqrt{\frac{2b}{2c+2a-b}}+\sqrt{\frac{2c}{2a+2b-c}}$$

Bài 4.18: Với các số dương *a, b, c*, chứng minh rằng:

a) $a^3 + b^3 + c^3 \ge ab^2 + bc^2 + ca^2$ b) $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \ge ab + bc + ca$

c) $\frac{a^6}{b^3} + \frac{b^6}{c^3} + \frac{c^6}{a^3} \ge \frac{a^4}{c} + \frac{b^4}{a} + \frac{c^4}{b}$

Bài 4.19: Với các số dương *a, b, c* thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$.

Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 \ge \frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 4.20: Với các số dương *a, b, c* thỏa mãn điều kiện $4\ \ a + b + c\ \ = 3abc$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \ge \frac{3}{8}$

Bài 4.21: Với các số dương *a, b,* c. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a^3}{b\ \ b + c} + \frac{b^3}{c\ \ c + a} + \frac{c^3}{a\ \ a + b} \ge \frac{1}{2}\ \ a + b + c$

b) $\frac{a^3}{b + 2c\ \ ^2} + \frac{b^3}{c + 2a\ \ ^2} + \frac{c^3}{a + 2b\ \ ^2} \ge \frac{2}{9}\ \ a + b + c$

Bài 4.22: Cho x, y, z dương thỏa mãn và $xyz = 1$. Chứng minh rằng :

$$x^3 + y^3 + z^3 \ge x + y + z.$$

Bài 4.23: Cho a, b, c dương và $a + b + c = 1$.Chứng minh rằng:

$$9(a^4 + b^4 + c^4) \ge a^2 + b^2 + c^2.$$

Bài 4.24: Cho x, y, z dương thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng :

$$(1 + \frac{1}{x})^4 + (1 + \frac{1}{y})^4 + (1 + \frac{1}{z})^4 \ge 768.$$

Bài 4.25: Cho a, b dương thỏa mãn $a + b = 1$. Chứng minh rằng

a) $\frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2 + b^2} \ge 6$ b) $\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{2}{ab} + 4ab \ge 11$ c) $\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(b^2 + \frac{1}{a^2}\right) \ge \frac{289}{16}$

Bài 4.26: Cho hai số thực dương a, b. Chứng minh rằng

$\left(a^2 + b + \frac{3}{4}\right)\left(b^2 + a + \frac{3}{4}\right) \ge \left(2a + \frac{1}{2}\right)\left(2b + \frac{1}{2}\right)$.

Bài 4.27: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 3$ .Chứng minh rằng:

$\frac{1}{xyz} + \frac{4}{(x + y)(y + z)(z + x)} \ge \frac{3}{2}$

Bài 4.28: Cho x, y, z dương thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng

$\frac{x^3}{y^3 + 8} + \frac{y^3}{z^3 + 8} + \frac{z^3}{x^3 + 8} \ge \frac{1}{9} + \frac{2}{27}\ \ xy + yz + zx$

Bài 4.29: Cho a,b,c dương . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}}\ge\frac{1}{5}\ \ a+b+c$$

Bài 4.30: Cho ba số thực dương x,y,z. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{1+\frac{16x}{y+z}}+\sqrt{1+\frac{16y}{z+x}}+\sqrt{1+\frac{16z}{x+y}}\ge 9$$

Bài 4.31: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $abc\ge 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}\le\sqrt{2}\ \ a+b+c$$

Bài 3.32: Cho a,b,c là số dương. Chứng minh rằng

a) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2\ge\ \ a+b+c\ \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

b) $\sqrt{\frac{a^3}{a^3+\ \ b+c\ ^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+\ \ c+a\ ^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+\ \ a+b\ ^3}}\ge 1$

Bài 3.33: Cho $x,\ y,\ z$ là các số thực không âm thỏa mãn $x^3+y^3+z^3=3$. Chứng minh rằng $xy+yz+zx-xyz\le 2$.

Bài 3.34: Cho a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $M=a^3+64b^3+c^3$

Bài 3.35: Cho x,y,z dương thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Tìm GTNN của $P=x^2+2y^2+3z^2$

Bài 3.36: Cho a,b,c không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng $a^3+2b^3+3c^3\ge\frac{6}{7}$

Bài 3.37: Cho x,y,z dương thỏa mãn $x+\sqrt{xy}+\sqrt[3]{xyz}=\frac{4}{3}$. Chứng minh rằng $x+y+z\ge 1$

Bài 3.38: Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{16c^2}{a+b}\ge\frac{1}{9}(64c-a-b)$

Bài 3.39: Cho x,y,z dương thỏa mãn $y^2+yz+z^2=1-\frac{3x^2}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\ \ x+y+z$.

Bài 3.40: Cho x,y,z dương thỏa mãn $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$T=\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}$$

Bài 3.41: Cho x,y,z dương thỏa mãn $x+y+z=3$.Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A=\frac{x^2}{x+y^2}+\frac{y^2}{y+z^2}+\frac{z^2}{z+x^2}.$$