DẠNG 2: Chứng minh hai vectơ bằng nhau.

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh hai vectơ bằng nhau ta chứng minh chúng có cùng độ dài và cùng hướng hoặc dựa vào nhận xét nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

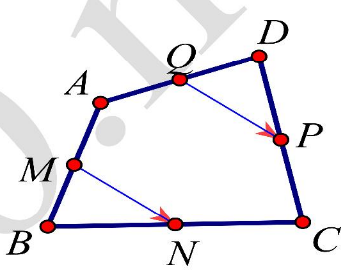
Lời giải (hình 1.6)

Do M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC nên MN là đường trung bình của tam giác ABC suy ra $MN \,//\, AC$ và

$MN = \frac{1}{2}AC$ (1).

Tương tự QP là đường trung bình của tam giác ADC suy ra $QP \,//\, AC$ và

$QP = \frac{1}{2}AC$ (2).



Hình 1.6

Từ (1) và (2) suy ra $MN \,//\, QP$ và $MN = QP$ do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Vậy ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi I là trung điểm của BC. Dựng điểm B' sao cho $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$

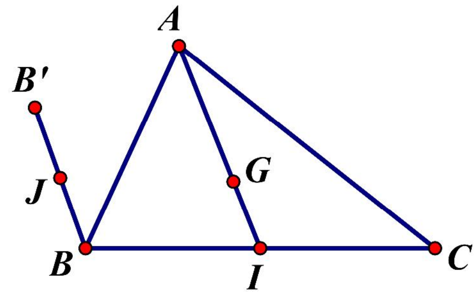
b) Gọi J là trung điểm của BB'. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

Lời giải (hình 1.7)

a) Vì I là trung điểm của BC nên $BI = CI$ và $\overrightarrow{BI}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IC}$ do đó hai vectơ $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{IC}$ bằng nhau hay $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.

b) Ta có $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$ suy ra $B'B = AG$ và $BB' \,//\, AG$.

Do đó $\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{IG}$ cùng hướng (1).



Hình 1.7

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $IG = \frac{1}{2}AG$, J là trung điểm BB'

suy ra $BJ = \frac{1}{2}BB'$

Vì vậy $BJ = IG$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

Ví dụ 3: Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng DC, AB theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $DM = BN$. Gọi P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{QB}$.

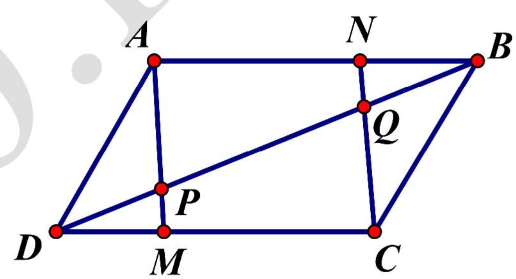
Lời giải (hình 1.8)

Ta có $DM = BN \Rightarrow AN = MC$, mặt khác AN song song với MC do đó tứ giác $ANCM$ là hình bình hành

Suy ra $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$.

Xét tam giác ΔDMP và ΔBNQ ta có

$DM = NB$ (giả thiết), $PDM = QBN$ (so le trong)



Hình 1.8

Mặt khác $DMP = APB$ (đối đỉnh) và

$APQ = NQB$ (hai góc đồng vị) suy ra

$DMP = BNQ$.

Do đó $\Delta DMP = \Delta BNQ$ (c.g.c) suy ra $DB = QB$.

Dễ thấy $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{QB}$ cùng hướng vì vậy $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{QB}$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.10: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$.

Bài 1.11: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DC, AB; P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB. Chứng minh rằng $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{NB}$ và $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QB}$.

Bài 1.12: Cho hình thang ABCD có hai đáy là AB và CD với $AB = 2CD$. Từ

C vẽ $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{DA}$. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{IC}$ và $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{CB}$ b) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{DC}$

Bài 1.13: Cho tam giác ABC có trực tâm H và O tâm là đường tròn ngoại tiếp . Gọi B' là điểm đối xứng B qua O. Chứng minh : $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$.