

➤ **DẠNG TOÁN 2: XÁC ĐỊNH CÁC BẤT PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG VÀ GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHÉP BIẾN ĐỔI TƯƠNG.**

1. Phương pháp giải.

Để giải bất phương trình ta thực hiện các phép biến đổi để đưa về bất phương trình tương đương với phương trình đã cho đơn giản hơn trong việc giải nó. Một số phép biến đổi thường sử dụng

- Cộng (trừ) cả hai vế của bất phương trình mà không làm thay đổi điều kiện xác định của bất phương trình ta thu được bất phương trình tương đương bất phương trình đã cho.
- Nhân (chia) vào hai vế của bất phương trình với một biểu thức *luôn dương* (hoặc *luôn âm*) và không làm thay đổi điều kiện xác định của phương trình ta thu được bất phương trình *cùng chiều* (hoặc *ngược chiều*) tương đương với bất phương trình đã cho.
- Bình phương hai vế của bất phương trình (hai vế luôn dương) ta thu được bất phương trình tương đương với bất phương trình đã cho.
- Lập phương hai vế của bất phương trình ta thu được bất phương trình tương đương với bất phương trình đã cho.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Trong các bất phương trình sau đây, bất phương trình nào tương đương với bất phương trình $3x+1 > 0$ (*):

a) $3x+1 - \frac{1}{x-3} > -\frac{1}{x-3}$

b) $3x+1 + \frac{x}{\sqrt{3x+1}} > \frac{x}{\sqrt{3x+1}}$

Lời giải

Ta có $3x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$

a) $3x+1 - \frac{1}{x-3} > -\frac{1}{x-3}$ (1) không tương đương $3x+1 > 0$ vì $x=3$ là nghiệm của bất phương trình

(*) nhưng không là nghiệm của bất phương trình (1).

b) $3x+1 + \frac{x}{\sqrt{3x+1}} > \frac{x}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow 3x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$

Do đó $3x+1 + \frac{x}{\sqrt{3x+1}} > \frac{x}{\sqrt{3x+1}}$ tương đương $3x+1 > 0$.

Ví dụ 2: Không giải bất phương trình, hãy giải thích vì sao các bất phương trình sau vô nghiệm.

a) $|x^2 + 2x| + 3 \leq 0$

b) $\frac{\sqrt{x}}{x+1} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} < 2$

Lời giải

a) Ta có $|x^2 + 2x| \geq 0 \Rightarrow |x^2 + 2x| + 3 > 0$ do đó bất phương trình vô nghiệm.

b) ĐKXD: $x > 0$.

Áp dụng BDT côsi ta có $\frac{\sqrt{x}}{x+1} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\frac{\sqrt{x}}{x+1} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x}}} = 2$

Suy ra bất phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 3: Không giải bất phương trình, hãy giải thích vì sao các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x .

a) $\sqrt{|x-1|} + x^2 \geq 2x-1$

b) $\frac{1}{x^2+1} - (x+1)^2 \leq \frac{1}{x^2+1}$

Lời giải

a) BPT $\Leftrightarrow \sqrt{|x-1|} + x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x-1|} + (x-1)^2 \geq 0$

Do $\sqrt{|x-1|} \geq 0$, $(x-1)^2 \geq 0$ với mọi x nên $\sqrt{|x-1|} + (x-1)^2 \geq 0$ với mọi x .

Vậy bất phương trình nghiệm đúng với mọi x .

b) BPT $\Leftrightarrow -(x+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0$ (đúng với mọi x)

Vậy bất phương trình nghiệm đúng với mọi x .

Ví dụ 4: Bạn Nam giải bất phương trình $|x+1| \geq x-1$ như sau

Bất phương trình tương đương với $(x+1)^2 \geq (x-1)^2$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S = [0; +\infty)$.

Theo em bạn Nam giải như vậy đúng hay sai? Nếu sai hãy sửa lại cho đúng.

Lời giải

Bạn Nam đã mắc sai lầm ở phép biến đổi bình phương hai vế

Lời giải đúng là:

• Với $x < 1$ ta có $|x+1| \geq 0$, $x-1 < 0$ suy ra nghiệm của bất phương trình là $x < 1$

• Với $x \geq 1$: Bất phương trình tương đương với
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ (x+1)^2 \geq (x-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 + 2x + 1 \geq x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 4x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S = \mathbb{R}$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 4.57: Trong các bất phương trình sau đây, bất phương trình nào tương đương với bất phương trình $3x+1 > 0$:

a) $3x+1 + \frac{1}{x+3} > \frac{1}{x+3}$

b) $3x+1 + \sqrt{x+1} > \sqrt{x+1}$

Bài 4.58: Không giải bất phương trình, hãy giải thích vì sao các bất phương trình sau vô nghiệm.

a) $\sqrt{x+1} > \sqrt{-x-4}$

b) $\sqrt{x+1} \leq -x^2 + x - 1$

Bài 4.59: Không giải bất phương trình, hãy giải thích vì sao các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x .

a) $|x+1| + 2x^2 - 2x + 1 > 0$

b) $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$

Bài 4.60: Bạn Bình giải bất phương trình $\sqrt{x+1}(\sqrt{2x+2}-1) \geq 0$ như sau

Bất phương trình tương đương với

$$\sqrt{2x+2}-1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+2} \geq 1 \Leftrightarrow 2x+2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S = [-\frac{1}{2}; +\infty)$.

Theo em bạn Bình giải như vậy đúng hay sai? Nếu sai hãy sửa lại cho đúng.