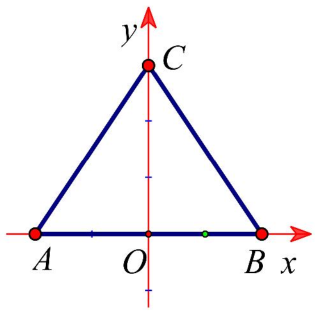
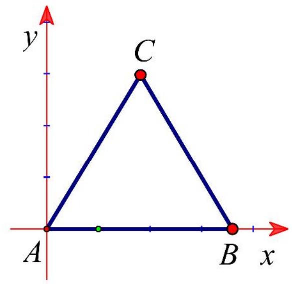
II. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TAM GIÁC.

1. Phương pháp:

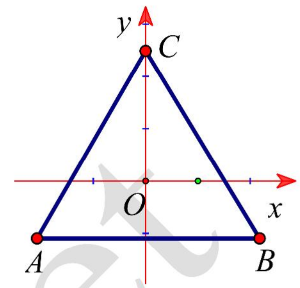
a) Nếu tam giác ABC đều ta thường thiết lập hệ trục toạ độ Oxy theo một trong ba dạng sau:



O là trung điểm AB



O trùng với một đỉnh của tam giác



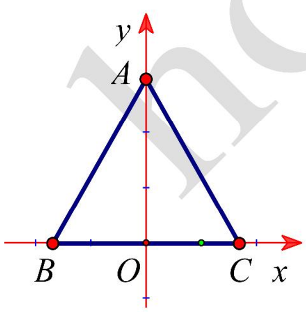
O là trọng tâm tam giác

b) Nếu tam giác ABC cân tại A, ta thường thiêt lập hệ trục toạ độ như sau:

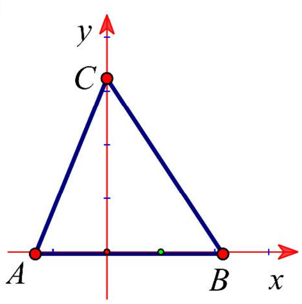
Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là trung điểm BC; B, C thuộc trục Ox; A thuộc trục Oy. (hình 3.8)

c) Nếu tam giác ABC vuông tại A, ta thường thiết lập hệ trục toạ độ như sau:
Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O trùng với A; B thuộc trục Ox; C thuộc trục Oy. (hình 3.9)

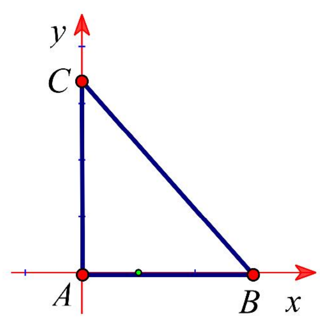
d) Nếu tam giác ABC bất kỳ, ta thường thiếp lập hệ trục tọa độ như sau:
Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho hai đỉnh thuộc trục Ox và đỉnh còn lại thuộc trục Oy. (hình 3.10)



Hình 3.8



Hình 3.9



Hình 3.10

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho ΔABC vuông cân tại C. Dựng đoạn CI (với $I \in AB$) vuông góc với trung tuyến AM.

a) Tính côsin góc giữa hai đường thẳng CI và CA.

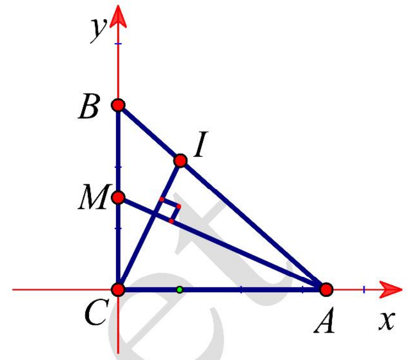
b) Tính tỷ số $\dfrac{BI}{AI}$.

Lời giải (hình 3.11)

Cho hệ trục toạ độ Oxy với

$C \equiv O,\ A \in Ox,\ B \in Oy$, giả sử

$CB = CA = a > 0$



Hình 3.11

Khi đó $A\ \ a;0\ \ ,\ B\ \ 0;a\ \ ,\ C\ \ 0;0\ \ ,\ M\left(0;\dfrac{a}{2}\right)$

Đường thẳng AB có phương trình là

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{a} = 1$ hay $x + y - a = 0$

$I\ \ x_0;y_0\ \ \in AB$ nên $x_0 + y_0 - a = 0$ (1)

Mặt khác $CI \perp AM \Rightarrow \overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AM} = 0$ mà $\overrightarrow{CI}\ \ x_0;y_0\ \ ,\ \overrightarrow{AM}\left(-a;\dfrac{a}{2}\right)$

nên $-ax_0 + \dfrac{a}{2}y_0 = 0$ hay $2x_0 - y_0 = 0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} x_0 + y_0 - a = 0 \\ 2x_0 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{a}{3} \\ y_0 = \dfrac{2a}{3} \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{a}{3};\dfrac{2a}{3}\right)$

a) Ta có $\overrightarrow{CI}\left(\dfrac{a}{3};\dfrac{2a}{3}\right),\ \overrightarrow{CA}\ \ a;0\ \ $ do đó

$$\cos\ \ CI;CA\ \ = \left|\cos\ \ \overrightarrow{CI};\overrightarrow{CA}\ \ \right| = \frac{\dfrac{a^2}{3}}{a\sqrt{\dfrac{a^2}{9} + \dfrac{4a^2}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

b) Ta có $BI = \sqrt{\dfrac{a^2}{9} + \dfrac{a^2}{9}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3},\ AI = \sqrt{\dfrac{4a^2}{9} + \dfrac{4a^2}{9}} = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$ suy ra

$\dfrac{BI}{AI} = \dfrac{1}{2}$.

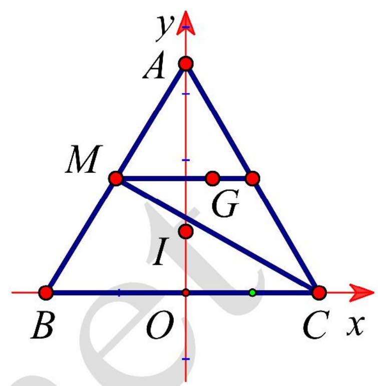
Ví dụ 2 : (Vô địch Toán Anh) Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M là trung điểm của cạnh AB, G là trọng tâm tam giác ACM. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng GI vuông góc với CM.

Lời giải (hình 3.12)

Cho hệ trục toạ độ Oxy với O là trung điểm BC, $B \in Ox,\ C \in Ox,\ A \in Oy$.

Không mất tính tổng quát giả sử $BC = 2t,\ t > 0 \Rightarrow B(-t;0),\ C(t;0)$ và

$A(0;a),\ a > 0$



Hình 3.12

Do M là trung điểm AB và G là trọng tâm tam giác ACM nên $M\left(-\dfrac{t}{2}, \dfrac{a}{2}\right), G\left(\dfrac{t}{6}, \dfrac{a}{2}\right)$.

Mặt khác I tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác cân ABC suy ra $I \in AO$ và $IA = IB$

Gọi tọa độ điểm I là $I(0;y)$ suy ra

$$IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (y-a)^2 = t^2 + y^2 \Leftrightarrow y = \frac{a^2 - t^2}{2a}$$

nên ta có $I\left(0, \dfrac{a^2 - t^2}{2a}\right)$. Khi đó $\overrightarrow{CM} = \left(-\dfrac{3t}{2}, \dfrac{a}{2}\right)$; $\overrightarrow{GI} = \left(-\dfrac{t}{6}, -\dfrac{t^2}{2a}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{GI} = -\dfrac{3t}{2}.\left(-\dfrac{t}{6}\right) + \dfrac{a}{2}\left(-\dfrac{t^2}{2a}\right) = 0 \Rightarrow CM \perp GI$ đpcm.

Ví dụ 3: Cho ΔABC đều cạnh a. M là điểm bất kỳ nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

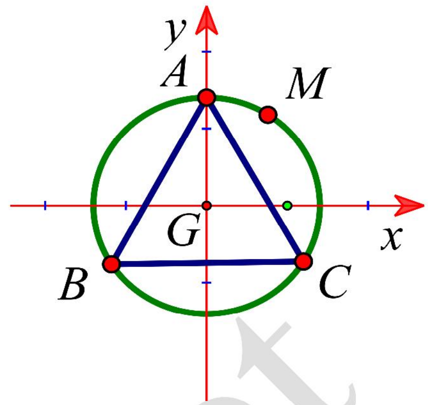
a) Chứng minh rằng $MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2$

b) Tìm tập hợp điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NB}.\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{NC}.\overrightarrow{NA} = \dfrac{a^2}{4}$ (*)

Lời giải (hình 3.13)

a) Chọn hệ trục toạ độ Oxy với trọng tâm $G \equiv O,\, A \in Oy,\, BC \parallel Ox$

Ta có $AG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ suy ra tọa độ các điểm là



Hình 3.13

$A\left(0,\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right),\, B\left(-\dfrac{a}{2},-\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right),\, C\left(\dfrac{a}{2},-\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)$ Vì tam giác ABC đều nên đường tròn ngoại tiếp ΔABC có tâm là G bán kính AG suy ra có phương trình là $(C): x^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{3}$

Giả sử $M(x_0;y_0)$, $M \in (C) \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = \dfrac{a^2}{3}$ suy ra

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = x_0^2 + \left(y_0 - \frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(x_0 + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y_0 + \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 +$$

$$+\left(x_0 - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y_0 + \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = 3\left(x_0^2 + y_0^2\right) = a^2 \text{ (đpcm)}$$

b) Giả sử điểm $N(x;y)$ thoả mãn (*)

Ta có

$$\overrightarrow{NA} = \left(-x;\frac{a\sqrt{3}}{3} - y\right),\, \overrightarrow{NB} = \left(-\frac{a}{2} - x;-\frac{a\sqrt{3}}{6} - y\right),\, \overrightarrow{NC} = \left(\frac{a}{2} - x;-\frac{a\sqrt{3}}{6} - y\right)$$

Do đó

$$(*) \Leftrightarrow x\left(\frac{a}{2} + x\right) + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{3}\right)\left(y + \frac{a\sqrt{3}}{6}\right) + \left(x + \frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{a}{2}\right) + \left(y + \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 +$$

$$+\left(x - \frac{a}{2}\right)x + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{3}\right)\left(y + \frac{a\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

Vậy tập hợp điểm N thuộc đường tròn tâm O bán kính $R = \frac{a}{2}$.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC có trực tâm H. Trên đoạn $HB,\ HC$ lấy điểm $B',\ C'$ sao cho góc $AB'C$ và góc $AC'B$ bằng 90^0. Chứng minh rằng $AB' = AC'$.

Lời giải (hình 3.14)

Chọn hệ trục toạ độ Oxy với $A \in Oy;\ B,\ C \in Ox$

Giả sử $A\ \ 0;a\ \ ,\ B\ \ b;0\ \ ,\ C\ \ c;0\ \ $ với $a > 0,\ b < 0,\ c > 0$

Ta có $\overrightarrow{AC}\ \ c;-a\ \ $ nên đường cao BH nhận $\vec{u}\ \ a;c\ \ $ làm vectơ chỉ phương có phương trình là $\begin{cases} x = b + at \\ y = ct \end{cases}$

$B' \in BC \Rightarrow B'\ \ b + at;ct$

Mặt khác $AB'C = 90^0$ suy ra $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{CB'} = 0$,

$\overrightarrow{AB'}\ \ b + at;a + ct\ \ ,\ \overrightarrow{CB'}\ \ at + b - c;ct$

Do đó $\ b + at\ \ \ at + b - c\ \ +\ \ a + ct\ \ ct = 0$

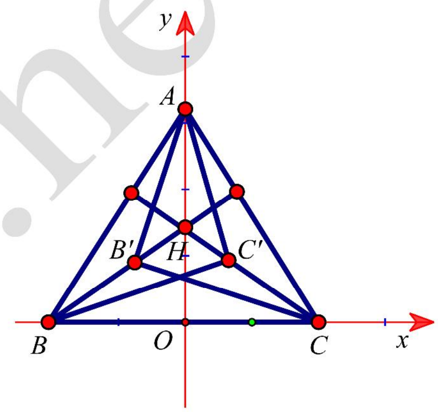
$\Leftrightarrow\ \ a^2 + c^2\ \ t + 2a\ \ b - c\ \ t + b\ \ b - c\ \ = 0\ \ 1$

Ta có $AB'^2 =\ \ at + b\ \ ^2 +\ \ ct - a\ \ ^2$

$=\ \ a^2 + c^2\ \ t^2 + 2a\ \ b - c\ \ t + a^2 + b^2\ \ 2$

Từ (1) và (2) suy ra $AB'^2 = a^2 + bc$

Tương tự ta có $AC'^2 = a^2 + bc$ suy ra $AB'^2 = AC'^2$ hay $AB' = AC'$



Hình 3.14

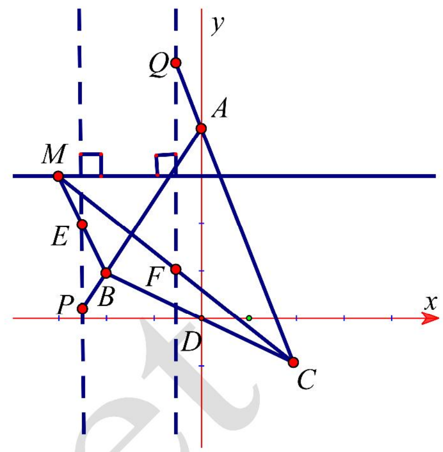
Ví dụ 5.(VMO 2008) Cho tam giác ABC với trung tuyến AD. Cho điểm M nằm trên đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng AD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của $MB,\ MC$. Đường thẳng đi qua E và vuông góc với Δ cắt đường thẳng AB ở P, đường thẳng đi qua F và vuông góc với Δ cắt đường thẳng AC ở Q. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua M vuông góc với đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M di động trên đường thẳng Δ.

Lời giải (hình 3.15)

Chọn hệ trục toạ độ Oxy với
$D \equiv O,\ A \in Oy,\ \Delta \parallel Oy$

Đặt $A(0;a)$, $D(0;0)$, $B(-b;-c)$, $C(b;c)$, trong đó $a,\ b,\ c\ (a > 0)$ là các hằng số.

Giả sử $M(t;d)$ là điểm di động trên Δ trong đó d là hằng số, t thay đổi



Hình 3.15

E là trung điểm MB nên $E\left(\dfrac{t-b}{2};\dfrac{d-c}{2}\right)$ suy ra đường thẳng đi qua E và vuông góc với Δ có phương trình là $x = \dfrac{t-b}{2}$, đường thẳng đi qua hai điểm A,B có phương trình là $(a+c)x - b(y-a) = 0$

Suy ra tọa độ điểm P là $P\left(\dfrac{t-b}{2};\dfrac{(c+a)t}{2b}+\dfrac{a-c}{2}\right)$

Tương tự ta có F là trung điểm của MC nên $F\left(\dfrac{t+b}{2};\dfrac{d+c}{2}\right)$, đường thẳng đi qua F và vuông góc với Δ có phương trình $x = \dfrac{t+b}{2}$. Đường thẳng đi qua AC có phương trình là $(a-c)x + b(y-a) = 0$

Suy ra tọa độ điểm Q là $\left(\dfrac{t+b}{2},\dfrac{(c-a)t}{2b}+\dfrac{a+c}{2}\right)$

Ta có $\overrightarrow{PQ}\left(b;c-\dfrac{at}{b}\right)$ nên đường thẳng đi qua M và vuông góc với PQ có dạng là

$$b(x-t)+\left(c-\frac{at}{b}\right)(y-d)=0 \Leftrightarrow t\left(\frac{a}{b}(y-d)+b\right)-c(y-d)-bx=0$$

(*)
Đẳng thức (*) đúng với mọi t khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b}(y-d)+b=0 \\ c(y-d)+bx=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{bc}{a} \\ y=-\dfrac{b^2}{a}+d \end{cases}$$

Suy ra đường thẳng qua M và vuông góc với PQ luôn đi qua điểm
$R\left(\frac{bc}{a};-\frac{b^2}{a}+d\right)$

Chú ý: Trong trường hợp này, để tận dụng tốt nhất các giả thiết vuông góc và trung điểm, ta đã linh hoạt chọn hệ trục tọa độ có trục tung là trung tuyến AD thay vì đường cao ứng với đỉnh A.