3. Các ví dụ.

a) Ứng dụng trong giải phương trình, bất phương trình.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}=\sqrt{x+9}$.

b) $\left|\sqrt{x^2+4x+13}-\sqrt{x^2-2x+2}\right|=\sqrt{13}$

Lời giải

a) Điều kiện xác định : $x\geq 0$.

Đặt $\vec{u}\left(2\sqrt{2};\sqrt{x+1}\right),\vec{v}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}};\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)\Rightarrow \vec{u}.\vec{v}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}$

và $\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|=\sqrt{8+x+1}.\sqrt{\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+1}}=\sqrt{x+9}$

Do đó $\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|\Rightarrow \vec{u},\vec{v}$ cùng hướng

$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{x}}{x+1}\Leftrightarrow x=\frac{1}{7}$ (tmdk)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\frac{1}{7}$.

b) $pt\Leftrightarrow\left|\sqrt{\left(x+2\right)^2+9}-\sqrt{\left(x-1\right)^2+1}\right|=\sqrt{13}$

Đặt $\vec{u}\left(x+2;3\right),\vec{v}\left(x-1;1\right)$

Ta có $\left|\vec{u}-\vec{v}\right|=\sqrt{13}$, $\left|\vec{u}\right|-\left|\vec{v}\right|=\sqrt{\left(x+2\right)^2+9}-\sqrt{\left(x-1\right)^2+1}$

Do đó $\left|\left|\vec{u}\right|-\left|\vec{v}\right|\right|=\left|\vec{u}-\vec{v}\right|\Leftrightarrow \vec{u},\vec{v}$ cùng hướng (*)

Ta có $x=1$ không là nghiệm của phương trình.

Xét $x\neq 1$ khi đó (*) $\Leftrightarrow \frac{x+2}{x-1}=\frac{3}{1}\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\frac{5}{2}$

Ví dụ 2: Giải bất phương trình sau

$\sqrt{x^2-2x+2}\geq\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+2x+1}$

Lời giải

BPT $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+1} \geq \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+(x+1)^2}$ (*)

Trong mặt phẳng Oxy xét các vectơ $\vec{u}(x;x+1)$, $\vec{v}(1;x)$ khi đó ta có

$\left|\vec{u}-\vec{v}\right| = \sqrt{(x-1)^2+1}$, $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{2x^2+2x+1}$, $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{x^2+1}$

Do đó (*) trở thành $\left|\vec{u}-\vec{v}\right| \geq \left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right|$

Mặt khác ta luôn có $\left|\vec{u}-\vec{v}\right| \leq \left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right|$

suy ra $\left|\vec{u}-\vec{v}\right| = \left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right|$ hay $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ngược hướng

Dễ thấy $x = 0$ là nghiệm của bất phương trình.

Với $x \neq 0$ thì $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ngược hướng khi và chỉ khi

$$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm là $x = 0$ hoặc $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.