B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: ỨNG DỤNG PHÉP NGHỊCH ĐẢO TRONG BÀI TOÁN CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VÀ TÍNH TOÁN.

Các ví dụ

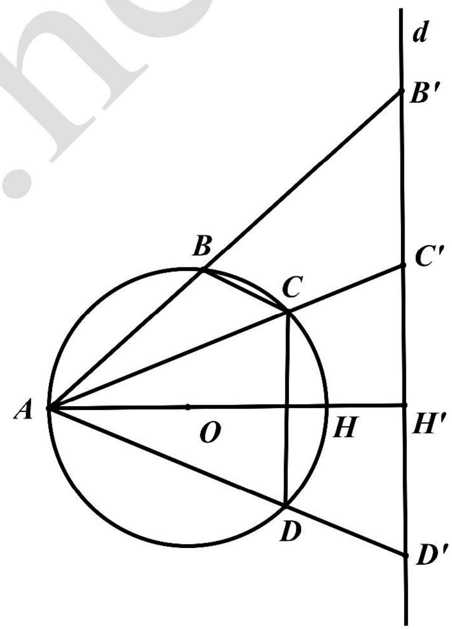
Ví dụ 1. (Định lí Ptolé meé) Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh $ABCD$ nội tiếp khi và chỉ khi $AB.CD+AD.BC=AC.BD$.

Lời giải.

Xét phép nghịch đảo tâm A, phương tích $k\neq 0$ bất kì.

Gọi B',C',D' lần lượt là ảnh của A,B,C qua f_O^k.

Vậy A,B,C,D nằm trên đường tròn $(O)\Leftrightarrow$ B',C',D' nằm đường thẳng d (ảnh của (O) qua f_O^k).



Vậy $ABCD$ nội tiếp khi và chỉ khi

$B'C'+C'D'=B'D'$ $(*)$

Mà $B'C'=\dfrac{|k|}{AB.AC}.BC, C'D'=\dfrac{|k|}{AC.AD}.CD,$

$B'D'=\dfrac{|k|}{AB.AD}.BD$

Do đó

$(*)\Leftrightarrow \dfrac{|k|}{AB.AC}.BC+\dfrac{|k|}{AC.AD}.CD$

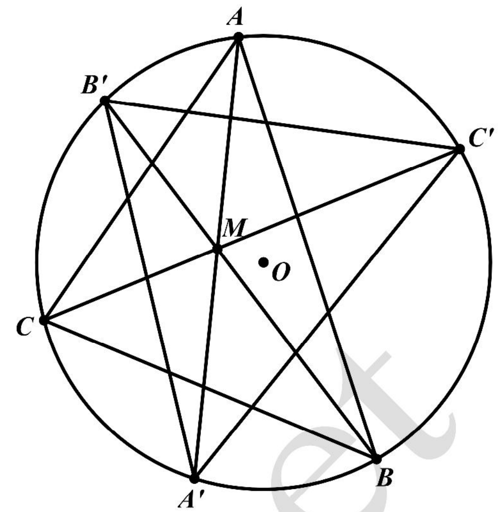
$=\dfrac{|k|}{AB.AD}.BD$

$\Leftrightarrow \dfrac{BC}{AB.AC}+\dfrac{CD}{AC.AD}=\dfrac{BD}{AB.AD}$

$\Leftrightarrow BC.AD+CD.AB=AC.BD$.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Giả sử M là một điểm mằn trong đường tròn (O), các đường thẳng MA,MB,MC lần lượt cắt (O) tại các điểm A',B',C'. Chứng minh $\dfrac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=\dfrac{MA'.MB'.MC'}{MA.MB.MC}$.

Lời giải.



Xét phép nghịch đảo cực M, phương tích $k = P_{M/(O)}$.

Do

$\overline{MA}.\overline{MA'} = \overline{MB}.\overline{MB'} = \overline{MC}.\overline{MC'} = k \ (1)$

nên $f_O^k : A \to A', B \to B', C \to C'$, vì vậy

$A'B' = \dfrac{|k|}{MA.MB}.AB$,

$B'C' = \dfrac{|k|}{MB.MC}.BC$,

$A'C' = \dfrac{|k|}{MA.MC}.AC(2)$.

Mặt khác theo công thức tính diện tích tam giác ta có

$$S_{ABC} = \frac{AB.BC.CA}{4R}, S_{A'B'C'} = \frac{A'B'.B'C'.C'A'}{4R} \Rightarrow \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{A'B'.B'C'.C'A'}{AB.BC.CA} \ (3).$$

Từ $(1),(2),(3)$ ta có $\dfrac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \dfrac{|k|^3}{(MA.MB.MC)^2} = \dfrac{MA'.MB'.MC'}{MA.MB.MC}$.(đpcm)