

☒ **DẠNG 1. Bài toán liên quan đến khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng.**

**1. Phương pháp giải.**

Để tính khoảng cách từ điểm  $M(x_0; y_0)$  đến đường thẳng

$\Delta: ax + by + c = 0$  ta dùng công thức

$$d(M_0, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**2. Các ví dụ.**

**Ví dụ 1:** Cho đường thẳng  $\Delta: 5x + 3y - 5 = 0$

a) Tính khoảng cách từ điểm  $A(-1; 3)$  đến đường thẳng  $\Delta$

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng song song  $\Delta$  và  $\Delta': 5x + 3y + 8 = 0$

**Lời giải:**

a) Áp dụng công thức tính khoảng cách ta có:

$$d(A, \Delta) = \frac{|5 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 - 5|}{\sqrt{5^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{34}}$$

b) Do  $M(1; 0) \in \Delta$  nên ta có

$$d(\Delta; \Delta') = d(M, \Delta') = \frac{|5 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 8|}{\sqrt{5^2 + 3^2}} = \frac{13}{\sqrt{34}}$$

**Ví dụ 2: (ĐH – 2006A):** Cho 3 đường thẳng có phương trình

$$\Delta_1: x + y + 3 = 0; \Delta_2: x - y - 4 = 0; \Delta_3: x - 2y = 0$$

Tìm tọa độ điểm  $M$  nằm trên  $\Delta_3$  sao cho khoảng cách từ  $M$  đến  $\Delta_1$  bằng 2 lần khoảng cách từ  $M$  đến  $\Delta_2$ .

**Lời giải:**

$$M \in \Delta_3 \Rightarrow M(2t; t)$$

Khoảng cách từ  $M$  đến  $\Delta_1$  bằng 2 lần khoảng cách từ  $M$  đến  $\Delta_2$  nên ta có

$$d(M; \Delta_1) = 2d(M; \Delta_2) \Leftrightarrow \frac{|2t + t + 3|}{\sqrt{2}} = 2 \frac{|2t - t - 4|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3t + 3 = 2t - 4 \\ 3t + 3 = -2t - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -11 \\ t = 1 \end{cases}$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn là  $M_1(-22; -11)$ ,  $M_2(2; 1)$

**Ví dụ 3:** Cho ba điểm  $A(2;0)$ ,  $B(3;4)$  và  $P(1;1)$ . Viết phương trình đường thẳng đi qua P đồng thời cách đều A và B

**Lời giải:**

Đường thẳng  $\Delta$  đi qua P có dạng

$$a(x-1) + b(y-1) = 0 \quad a^2 + b^2 \neq 0 \quad \text{hay} \quad ax + by - a - b = 0$$

$\Delta$  cách đều A và B khi và chỉ khi

$$d(A; \Delta) = d(B; \Delta) \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|2a+3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b = 2a+3b \\ b-a = 2a+3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4b \\ 3a = -2b \end{cases}$$

+ Nếu  $a = -4b$ , chọn  $a = 4$ ,  $b = -1$  suy ra  $\Delta: 4x - y - 3 = 0$

+ Nếu  $3a = -2b$ , chọn  $a = 2$ ,  $b = -3$  suy ra  $\Delta: 2x - 3y + 1 = 0$

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn bài toán là  $\Delta_1: 4x - y - 3 = 0$  và  $\Delta_2: 2x - 3y + 1 = 0$

**Ví dụ 4:** Cho tam giác ABC có  $A(1;-2)$ ,  $B(5;4)$ ,  $C(-2,0)$ . Hãy viết phương trình đường phân giác trong góc A.

**Lời giải:**

**Cách 1:** Dễ dàng viết được phương trình đường thẳng AB, AC có phương trình

$$AB: 3x - 2y - 7 = 0, \quad AC: 2x + 3y + 4 = 0$$

Ta có phương trình đường phân giác góc A là

$$\begin{cases} \Delta_1: \frac{3x-2y-7}{\sqrt{13}} = \frac{2x+3y+4}{\sqrt{13}} \\ \Delta_2: \frac{3x-2y-7}{\sqrt{13}} = -\frac{2x+3y+4}{\sqrt{13}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1: x - 5y - 11 = 0 \\ \Delta_2: 5x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

Ta thấy  $(5 - 5 \cdot 4 - 11)(-2 - 5 \cdot 0 - 11) > 0$  nên 2 điểm B, C nằm về cùng 1 phía đối với đường thẳng  $\Delta_1$ . Vậy  $\Delta_2: 5x + y - 3 = 0$  là phương trình đường phân giác trong cần tìm.

**Cách 2:** Gọi  $D(x;y)$  là chân đường phân giác hạ từ A của tam giác ABC

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BD} = \frac{AB}{AC} \overrightarrow{DC}$$

$$\text{Mà } AB = 2\sqrt{13}, \quad AC = \sqrt{13}$$

$$\overrightarrow{BD} = \frac{AB}{AC} \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = 2(-2 - x) \\ y - 4 = 2(0 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases} \text{ suy ra } D\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$$

Ta có phương trình đường phân giác AD:  $\frac{y + 2}{\frac{4}{3} + 2} = \frac{x - 1}{\frac{1}{3} - 1}$  hay

$$5x + y - 3 = 0$$

Cách 3: Gọi  $M(x; y)$  thuộc đường thẳng  $\Delta$  là đường phân giác góc trong góc A

Ta có  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM})$

Do đó  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM})$  (\*)

Mà  $\overrightarrow{AB} = (4; 6)$ ;  $\overrightarrow{AC} = (-3; 2)$ ;  $\overrightarrow{AM} = (x - 1; y + 2)$  thay vào (\*) ta có

$$\frac{4(x - 1) + 6(y + 2)}{\sqrt{4^2 + 6^2} \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2}} = \frac{-3(x - 1) + 2(y + 2)}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2} \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2}}$$
$$\Leftrightarrow 2(x - 1) + 3(y + 2) = -3(x - 1) + 2(y + 2) \Leftrightarrow 5x + y - 3 = 0$$

Vậy đường phân giác trong góc A có phương trình là:  $5x + y - 3 = 0$

**Ví dụ 5:** Cho điểm  $C(-2; 5)$  và đường thẳng  $\Delta: 3x - 4y + 4 = 0$ . Tìm trên

$\Delta$  hai điểm  $A, B$  đối xứng với nhau qua  $I\left(2; \frac{5}{2}\right)$  và diện tích tam giác

$ABC$  bằng 15.

**Lời giải:**

Để thấy đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $M(0; 1)$  và nhận  $\vec{u}(4; 3)$  làm vector chỉ

phương nên có phương trình tham số là  $\begin{cases} x = 4t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$

Vì  $A \in \Delta$  nên  $A(4t; 1 + 3t)$ ,  $t \in R$ .

Hai điểm  $A, B$  đối xứng với nhau qua  $I\left(2; \frac{5}{2}\right)$  suy ra

$$\begin{cases} 2 = \frac{4t + x_B}{2} \\ \frac{5}{2} = \frac{1 + 3t + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 4 - 4t \\ y_B = 4 - 3t \end{cases}$$

Do đó  $B(4-4t; 4-3t)$

Ta có  $AB = \sqrt{(4-8t)^2 + (3-6t)^2} = 5|2t-1|$  và

$$d(C; \Delta) = \frac{|3 \cdot (-2) - 4 \cdot 5 + 4|}{5} = \frac{22}{5}$$

$$\text{Suy ra } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot d(C; \Delta) = \frac{1}{2} \cdot 5|2t-1| \cdot \frac{22}{5} = 11|2t-1|$$

Diện tích tam giác  $ABC$  bằng

$$15 \Leftrightarrow 11|2t-1| = 15 \Leftrightarrow 2t-1 = \pm \frac{15}{11} \Leftrightarrow t = \frac{13}{11} \text{ hoặc } t = -\frac{2}{11}.$$

$$\text{Với } t = \frac{13}{11} \Rightarrow A\left(\frac{52}{11}; \frac{50}{11}\right), B\left(-\frac{8}{11}; \frac{5}{11}\right)$$

$$\text{Với } t = -\frac{2}{11} \Rightarrow A\left(-\frac{8}{11}; \frac{5}{11}\right), B\left(\frac{52}{11}; \frac{50}{11}\right)$$

$$\text{Vậy } A\left(\frac{52}{11}; \frac{50}{11}\right), B\left(-\frac{8}{11}; \frac{5}{11}\right) \text{ hoặc } A\left(-\frac{8}{11}; \frac{5}{11}\right), B\left(\frac{52}{11}; \frac{50}{11}\right).$$

### 3. Bài tập luyện tập:

**Bài 3.47:** Tính khoảng cách từ điểm  $M$  đến đường thẳng  $d$  trong các trường hợp sau:

a)  $M(1; -1)$  và  $d : x + y - 5 = 0$     b)  $M(3; 2)$  và  $d$  là trục  $Ox$ .

c)  $M(-3; 2); (d) : 2x = 3$     d)  $M(5; -2); (d) : \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 5 - t \end{cases}$

**Bài 3.48:** Cho hai đường thẳng

$$d_1 : 2x - 3y + 1 = 0; d_2 : -4x + 6y - 3 = 0$$

a) Chứng minh rằng  $d_1 // d_2$

b) Tính diện tích hình vuông có 4 đỉnh nằm trên 2 đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$ .

c) Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  song song và cách đều  $d_1, d_2$ .

**Bài 3.49:** Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm  $E(2; -1)$  và cách điểm  $F(-3; -1)$  một đoạn bằng 3.

**Bài 3.50:** Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm  $I(-2; 3)$  và cách đều hai điểm  $A(5; -1)$  và  $B(3; 7)$ .

**Bài 3.51:** a) Cho hai điểm  $A(2;2)$ ,  $B(5;1)$ . Tìm điểm  $C$  trên đường thẳng  $\Delta: x - 2y + 8 = 0$  sao cho diện tích tam giác  $ABC$  bằng 17.  
b) Cho tam giác  $ABC$  có  $A(2;-4)$ ,  $B(0;-2)$  và  $C$  nằm trên đường thẳng  $3x - y + 1 = 0$ ; diện tích tam giác  $ABC$  bằng 1 (đơn vị diện tích). Hãy tìm tọa độ điểm  $C$ .

**Bài 3.52:** a) Cho hai đường thẳng  $d_1: 2x - 3y + 5 = 0$ ;  $d_2: 3x + 2y - 2 = 0$ . Tìm  $M$  nằm trên  $Ox$  cách đều  $d_1$  và  $d_2$ .

b) Cho 3 đường thẳng

$d_1: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$ ;  $d_2: 6x + 8y - 1 = 0$ ;  $d_3: 4x - 3y + 2 = 0$ . Tìm  $M$

nằm trên  $d_1$  cách đều  $d_2$  và  $d_3$ .

**Bài 3.53:** Cho 2 điểm  $A(2;1)$ ,  $B(-3;2)$  và đường thẳng

$d: 4x + 3y + 5 = 0$ . Tìm điểm  $M$  cách đều  $A, B$  đồng thời khoảng cách từ  $M$  đến  $d$  bằng 2.

**Bài 3.54:** Cho điểm  $A(3;1)$ . Xác định hai điểm  $B$  và  $C$  sao cho  $OABC$  là hình vuông và  $B$  nằm trong góc phần tư thứ nhất. Viết phương trình 2 đường chéo của hình vuông đó.

**Bài 3.55:** Cho hai điểm  $A(1;1)$ ,  $B(4;-3)$ . Tìm điểm  $C$  thuộc đường thẳng  $x - 2y - 1 = 0$  sao cho khoảng cách từ  $C$  đến đường thẳng  $AB$  bằng 6.

**Bài 3.56:** Cho tam giác  $ABC$  có diện tích bằng 4, hai đỉnh  $A(1;-2)$ ,  $B(2;-3)$  và trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  nằm trên đường thẳng  $d: x - y - 2 = 0$ . Tìm tọa độ điểm  $C$ .

**Bài 3.57:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(0;1)$  và phương trình các đường cao  $BB': 2x - y - 1 = 0$ ,  $CC': x + 3y - 1 = 0$ . Tính diện tích tam giác  $ABC$ .

**Bài 3.58:** Cho các điểm  $A(1;0)$ ,  $B(-2;4)$ ,  $C(-1;4)$ ,  $D(3;5)$ . Tìm tập hợp điểm  $M$  sao cho diện tích hai tam giác  $MAB$  và  $MCD$  bằng nhau.

**Bài 3.59:** Cho hình bình hành  $ABCD$  có diện tích bằng 4. Biết  $A(1;0)$ ,  $B(0;2)$  và giao điểm  $I$  của hai đường chéo nằm trên đường thẳng  $y = x$ . Tìm tọa độ đỉnh  $C$  và  $D$ .

**Bài 3.60.** Cho các điểm  $A(2;3)$ ,  $B(5;2)$ ,  $C(8;6)$  và một đường thẳng  $d: x - y + 5 = 0$ . Tìm trên  $d$  một điểm  $D$  sao cho hình vuông  $MNPQ$  có các cạnh lần lượt đi qua các điểm  $A, B, C, D$  có diện tích lớn nhất.

**Bài 3.61.** Cho ba điểm  $A(2;3)$ ,  $B(4;-1)$ ,  $C(4;5)$ . Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $A$  sao cho tổng khoảng cách từ các điểm  $B$  và  $C$  đến đường thẳng  $\Delta$  đạt giá trị lớn nhất.

**Bài 3.62 :** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy, cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$ . Biết  $A(3;0)$ , đỉnh  $C$  thuộc trục tung và có tung độ nhỏ hơn 1, điểm  $B$  nằm trên đường thẳng  $\Delta: 4x + 3y - 12 = 0$ . Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ , biết tam giác  $ABC$  có diện tích bằng 6.