## Vấn đề 1. Tính đạo hàm bằng định nghĩa

**Phương pháp:**

- $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- $f'(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- $f'(x_0^-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = x_0 \Leftrightarrow f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$
- Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm thì trước hết phải liên tục tại điểm đó.

**Các ví dụ**

**Ví dụ 1.** Tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ:

**1.** $f(x) = 2x^3 + 1$ tại $x = 2$

**2.** $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ tại $x = 1$

**3.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ tại $x = 0$

**Lời giải.**

**1**. Ta có $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^3 - 16}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} 2(x^2 + 2x + 4) = 24 \Rightarrow f'(2) = 24$.

**2.** Ta có : $f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}}{x - 1}$

$$= \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**3**. Ta có $f(0) = 0$, do đó:

$$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x + 1}{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2}$$

Vậy $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

**Ví dụ 2.** Chứng minh rằng hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2+|x+1|}{x-1}$ liên tục tại $x=-1$ nhưng không có đạo hàm tại điểm đó.

**Lời giải.**

Vì hàm $f(x)$ xác định tại $x=-1$ nên nó liên tục tại đó.

Ta có: $f'(-1^+)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{2x}{x-1}=1$

$f'(-1^-)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}2=2$

$\Rightarrow f'(-1^+)\neq f'(-1^-)\Rightarrow f(x)$ không có đạo hàm tại $x=-1$.

**Ví dụ 3.** Tìm $a$ để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ có đạo hàm tại $x=1$

**Lời giải.**

Để hàm số có đạo hàm tại $x=1$ thì trước hết $f(x)$ phải liên tục tại $x=1$

Hay $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2=f(1)=a$.

Khi đó, ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{x^2-1}{x-1}-2}{x-1}=1$.

Vậy $a=2$ là giá trị cần tìm.

**CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP**

**Bài 1** Tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra

**1.** $f(x)=2x+1$ tại $x_0=1$

**2.** $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ tại $x_0=2$

**3.** $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ tại điểm $x_0=2$

**4.** $f(x)=\sin^2 x$ tại $x=\dfrac{\pi}{2}$

**5.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 0 & \text{khi } x=1\end{cases}$ tại điểm $x_0=1$.

**Bài 2** Tính đạo hàm của các hàm số sau tại điểm chỉ ra

**1.** $f(x)=\sin 2x$ tại $x_0=\dfrac{\pi}{2}$

**2.** $f(x)=\tan x$ tại $x=\dfrac{\pi}{4}$

**3.** $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0 \\ 0 & \text{khi } x=0 \end{cases}$ tại $x=0$.

**Bài 3** Tính đạo hàm các hàm số sau tại các điểm chỉ ra

**1.** $f(x)=x^3$ tại $x_0=1$

**2.** $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x\geq 1 \\ \dfrac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1} & \text{khi } x<1 \end{cases}$ tại $x_0=1$.

**3.** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{x} & \text{khi } x>0 \\ x+x^2 & \text{khi } x\leq 0 \end{cases}$ tại $x_0=0$

**4.** $f(x)=\dfrac{x^2+|x+1|}{x}$ tại $x_0=-1$.

**Bài 4**

**1.** Tìm $a,b$ để hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{khi } x\geq 1 \\ ax+b & \text{khi } x<1 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x=1$.

**2.** Tìm a,b để hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{khi } x\geq 0 \\ 2x^2+ax+b & \text{khi } x<0 \end{cases}$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

**3.** Tìm $a,b$ để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x+1} & \text{khi } x\geq 0 \\ ax+b & \text{khi } x<0 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=0$.