Vấn đề 1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Phương pháp:

- Tìm giới hạn của hàm số $y=f(x)$ khi $x\to x_0$ và tính $f(x_0)$
- Nếu tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ thì ta so sánh $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ với $f(x_0)$.

Chú ý:

1. Nếu hàm số liên tục tại x_0 thì trước hết hàm số phải xác định tại điểm đó

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=l$.

3. Hàm số $y=\begin{cases} f(x) & \text{khi } x\neq x_0 \\ k & \text{khi } x=x_0 \end{cases}$ liên tục tại $x=x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=k$.

4. Hàm số $f(x)=\begin{cases} f_1(x) & \text{khi } x\geq x_0 \\ f_2(x) & \text{khi } x<x_0 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x=x_0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0^+} f_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f_2(x)=f_1(x_0)$.

Chú ý:

- Hàm số $y=\begin{cases} f(x) & \text{khi } x\neq x_0 \\ k & \text{khi } x=x_0 \end{cases}$ liên tục tại $x=x_0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=k$.
- Hàm số $y=\begin{cases} f(x) & \text{khi } x> x_0 \\ g(x) & \text{khi } x\leq x_0 \end{cases}$ liên tục tại $x=x_0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} g(x)$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của hàm số sau tại $x=3$

1. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-27}{x^2-x-6} & \text{khi } x\neq 3 \\ \dfrac{10}{3} & \text{khi } x=3 \end{cases}$ **2.**

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-3}{\sqrt{2x+3}-3} & \text{khi } x<3 \\ (x-1)^2 & \text{khi } x\geq 3 \end{cases}$

Lời giải.

1. Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có $f(3)=\frac{10}{3}$ và $\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-x-6}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+2)}$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x+9}{x+2}=\frac{27}{5}\neq f(3).$$

Vậy hàm số không liên tục tại $x=3$.

2. Ta có $f(3)=4$ và $\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}(x-1)^2=4$;

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}\frac{x-3}{\sqrt{2x+3}-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{2x+3}+3}{2}=3\neq\lim_{x\to 3^+}f(x)$$

Vậy hàm số gián đoạn tại $x=3$.

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm chỉ ra

1. $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{khi } x\neq 1\\ 2 & \text{khi } x=1\end{cases}$ tại điểm $x_0=1$

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-x-2|}{x+1} & \text{khi } x\neq -1\\ 1 & \text{khi } x=-1\end{cases}$

Lời giải.

1. Ta có $f(1)=2$ và $\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}(x^2+1)=2=f(1)$

Vậy hàm số liên tục tại điểm $x=1$.

2. Ta có $f(-1)=1$

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{|(x+1)(x-2)|}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}(2-x)=3$$

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{|(x+1)(x-2)|}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}(x-2)=-3\neq\lim_{x\to -1^+}f(x)$$

Suy ra không tồn tại giới hạn của hàm số $y=f(x)$ khi $x\to -1$.

Vậy hàm số gián đoạn tại $x=-1$.

Ví dụ 3 Tìm a để hàm số sau liên tục tại $x=2$

1. $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ a & \text{khi } x=2\end{cases}$

2. $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-8} & \text{khi } x<2\\ ax^2+x+1 & \text{khi } x\geq 2\end{cases}$

Lời giải.

1. Ta có $f(2)=a$ và $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{4}{\sqrt[3]{(4x)^2}+2\sqrt[3]{4x}+4}=\frac{1}{3}$

Hàm số liên tục tại điểm $x=2\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow a=\frac{1}{3}$.

2. Ta có : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^4-5x^2+4}{x^3-8}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{(x^2-1)(x+2)}{x^2+2x+4}=1$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(ax^2+x+1\right)=4a+3=f(2)$

Hàm số liên tục tại $x=2\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$

$\Leftrightarrow 4a+3=1\Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Xét tính liên tục của hàm số $y=f(x)$ tại điểm chỉ ra

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} & \text{khi } x\neq 4\\ \dfrac{1}{4} & \text{khi } x=4\end{cases}$ tại $x=4$

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x-1}}+2 & \text{khi } x>1\\ 3x^2+x-1 & \text{khi } x\leq 1\end{cases}$ tại $x=1$

3. $f\left(x\right)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{khi } |x|\leq 1\\ |x-1| & \text{khi } |x|>1\end{cases}$ tại $x=1$ và $x=-1$.

Bài 2. Chọn giá trị $f(0)$ để các hàm số sau liên tục tại điểm $x=0$.

1. $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x(x+1)}$

2. $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{2x+8}-2}{\sqrt{3x+4}-2}$

Bài 3. Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm đã chỉ ra

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\sqrt{x+2}}{x+1} & \text{khi } x>-1\\ 2x+3 & \text{khi } x\leq -1\end{cases}$ tại $x_0=-1$

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1+\sqrt[3]{x-1}}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 2 & \text{khi } x=0\end{cases}$ tại $x_0=0$

3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ \dfrac{1}{3} & \text{khi } x=1\end{cases}$ tại $x_0=1$

4. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x-2}}+2x & \text{khi } x>2\\ x^2-x+3 & \text{khi } x\leq 2\end{cases}$ tại $x_0=2$

Bài 4. Tìm a để các hàm số sau liên tục tại các điểm đã chỉ ra

1. $f(x)=\begin{cases}x+2a & \text{khi } x<0\\ x^2+x+1 & \text{khi } x\geq 0\end{cases}$ tại $x=0$

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{ax^2+(2a+1)x} & \text{khi } x\neq 0\\ 3 & \text{khi } x=0\end{cases}$ tại $x=0$

3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1} & \text{khi } x>1\\ \dfrac{a(x^2-2)}{x-3} & \text{khi } x\leq 1\end{cases}$ tại $x=1$.