B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: TÍNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG.

Phương pháp:

Để tính góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) ta có thể thực hiện theo một trong các cách sau:

Cách 1. Tìm hai đường thẳng a, b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (α) và (β). Khi đó góc giữa hai đường thẳng a, b chính là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β).

$$\begin{cases} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\beta) \end{cases} \Rightarrow \left((\alpha),(\beta)\right) = (a,b).$$

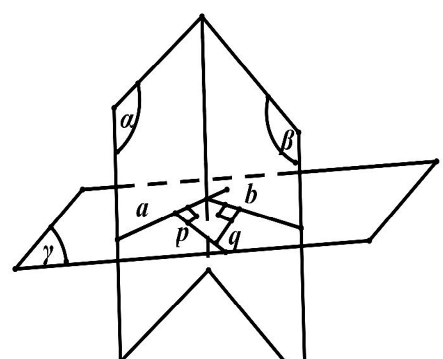
Cách 2. Tìm hai vec tơ $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ có giá lần lượt vuông góc với (α) và (β) khi đó góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) xác định bởi $\cos\varphi = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$.

Cách 3. Sử dụng công thức hình chiếu $S' = S\cos\varphi$, từ đó để tính $\cos\varphi$ thì ta cần tính S và S'.

Cách 4. Xác định cụ thể góc giữa hai mặt phẳng rồi sử dụng hệ thức lượng trong tam giác để tính. Ta thường xác định góc giữa hai mặt phẳng theo một trong hai cách sau:

a)

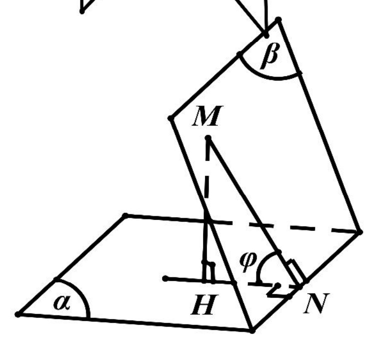
- Tìm giao tuyến $\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$
- Chọn mặt phẳng $(\gamma) \perp \Delta$
- Tìm các giao tuyến $a = (\gamma) \cap (\alpha), b = (\gamma) \cap (\beta)$
- $\left((\alpha),(\beta)\right) = (a,b)$



b)

- Tìm giao tuyến $\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$
- Lấy $M \in (\beta)$. Dựng hình chiếu H của M trên (α)
- Dựng $HN \perp \Delta \Rightarrow MN \perp \Delta$.

Phương pháp này có nghĩa là tìm hai đường thẳng nằm trong hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ và vuông góc với giao tuyến Δ tại một điểm trên giao tuyến.



Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB=a, AD=a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a$.
a) Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$.
b) Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

Lời giải.

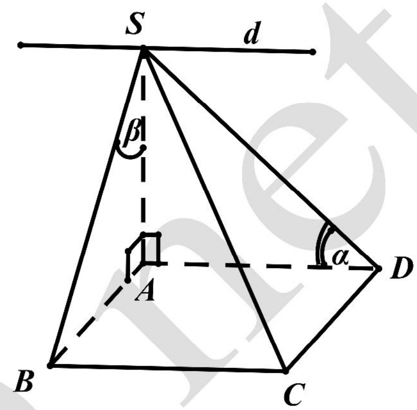
a) Ta có $(SCD)\cap(ABCD)=CD$

$\begin{cases} CD\perp SA \\ CD\perp AD \end{cases} \Rightarrow CB\perp(SAD)$

$(SAD)\cap(ABCD)=AD,(SAD)\cap(SCD)=SD$

$\Rightarrow \left((SCD),(ABCD)\right)=(DA,SD)=SDA=\varphi$

$\tan\varphi=\dfrac{SA}{AD}=\dfrac{a}{a\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\varphi=30^0$



b) Ta có $\begin{cases} AD\cap(SAD) \\ BC\cap(SBC) \\ AD\,//\,BC \end{cases} \Rightarrow (SAD)\cap(SBC)=d\,//\,AD\,//\,BC$.

Vì $\begin{cases} SA\perp d \\ d\,//\,AD \end{cases}\Rightarrow SA\perp d$, $\begin{cases} d\,//\,AD \\ AD\perp AD \end{cases}\Rightarrow d\perp AB$ nên $(SAB)\perp d$

$(SAB)\cap(SBC)=SB,(SAB)\cap(SAD)=SA$ suy ra ASB chính là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

Tam giác ASB vuông cân tại A nên $ASB=45^0$.

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'CD)$.

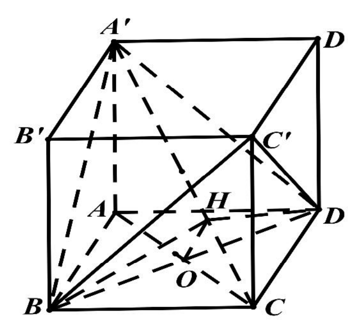
Lời giải.

Cách 1.

Ta có $(A'BC)\cap(A'CD)=A'C$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và H là hình chiếu vuông góc của O trên $A'C$.

Do $\begin{cases} BD\perp AC \\ BD\perp AA' \end{cases}\Rightarrow BD\perp(ACA')\Rightarrow BD\perp A'C$

Vậy $\begin{cases} A'C\perp OH \\ A'C\perp BD \end{cases}\Rightarrow A'C\perp(BDH)$.



$(BDH)\cap(A'CD)=HD,(BDH)\cap(A'BC)=BH\Rightarrow((A'BC),(A'BD))=(HB,HD)$.

Tam giác BCA' vuông tại B có đường cao BH, do đó

$$\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{BA'^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{3}{2a^2}\Rightarrow BH=a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Tương tự $DH=a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Áp dụng định lí côsin cho ΔHBD ta có

$$\cos BHD=\frac{HB^2+HD^2-BD^2}{2HB.HD}=\frac{\frac{2a^2}{3}+\frac{2a^2}{3}-2a^2}{2.\frac{2a^2}{3}}=-\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow BHD=120^0$. Vậy $((A'BC),(A'BD))=(HB,HD)=60^0$.

Cách 2. Gọi $H=A'C\cap(BDC')$, do mặt chéo (BDC') ứng với đường chéo $A'C$ nên $(BDC')\perp A'C$. Vậy góc giữa hai đường thẳng HB,HD chính là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'CD)$.

Do $CB=CD=CC'\Rightarrow HB=HD=HC'$ và $BD=BC'=DC'=a\sqrt{2}$ suy ra H la tâm của tam giác đều $C'BD\Rightarrow BHD=120^0$.

Vậy $((A'BC),(A'BD))=(HB,HD)=60^0$.

Cách 3: Do $\begin{cases}AB'\perp A'B\\AB'\perp BC\end{cases}\Rightarrow AB'\perp(A'BC)$

Tương tự $AD'\perp(A'CD)$ nên $((A'BC),(A'BD))=(AB',AD')=60^0$

(vì $\Delta AB'D'$ đều).

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=b,AC=c,AD=d$ đôi một vuông góc. Gọi α,β,γ lần lượt là góc giữa mặt phẳng (BCD) với các mặt phẳng $(ACD),(ABD),(ABC)$.

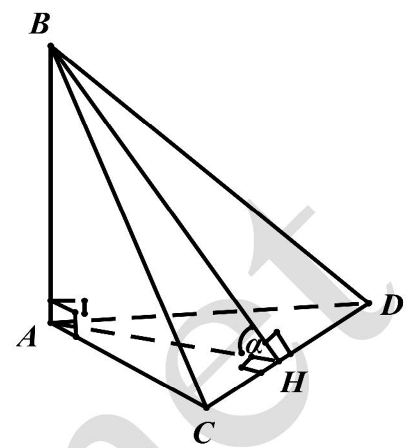
a)Chứng minh $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

b) Tính S_{BCD} theo khi $\alpha=30^0,\beta=45^0,\gamma=60^0$

Lời giải.

a*) Cách 1.*

Kẻ đường cao AH của tam giác ACD, do $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ACD) \Rightarrow AB \perp CD$.



Vậy $(ABH) \perp CD$ và CD là giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) nên $\alpha = AHB$.

Ta có

$\tan\alpha = \dfrac{AB}{AH} = \dfrac{b}{AH}$, mà $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{d^2}$

nên $\tan\alpha = \dfrac{b\sqrt{c^2+d^2}}{cd}$.

Mặt khác

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{c^2d^2}{b^2c^2 + c^2d^2 + d^2b^2}.$$

Tương tự ta có :

$$\cos^2\beta = \frac{b^2d^2}{b^2c^2 + c^2d^2 + d^2b^2},\ \cos^2\gamma = \frac{b^2c^2}{b^2c^2 + c^2d^2 + d^2b^2}$$

Từ đó suy ra $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Cách 2. Gọi H là hình chiếu của A trên (BCD) và I là trung điểm của CD. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{AD} = \vec{d} \Rightarrow |\vec{b}| = b, |\vec{c}| = c, |\vec{d}| = d$.

Dễ thấy $\overrightarrow{AH} \perp (BCD)$ và $\begin{cases} BH.BI = BA^2 = b^2 \\ IH.IB = IA^2 = \dfrac{c^2d^2}{c^2+d^2} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{BH}{IH} = \dfrac{b^2(c^2+d^2)}{c^2d^2} = k$

Suy ra $\overrightarrow{AH} = \dfrac{1}{1+k}\overrightarrow{AB} + \dfrac{k}{1+k}\overrightarrow{AI}$, mà

$\dfrac{IC}{ID} = \dfrac{AC^2}{AD^2} = \dfrac{c^2}{d^2} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \dfrac{d^2}{c^2+d^2}\overrightarrow{AC} + \dfrac{c^2}{c^2+d^2}\overrightarrow{CD}$ nên

$$\overrightarrow{AH} = \frac{c^2d^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}\overrightarrow{AB} + \frac{b^2c^2+d^2b^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}\left(\frac{d^2}{c^2+d^2}\overrightarrow{AC} + \frac{c^2}{c^2+d^2}\overrightarrow{AB}\right)$$

$$= \frac{c^2d^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}\vec{b} + \frac{d^2b^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}\vec{c} + \frac{b^2c^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}\vec{d}$$

Lại có $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ lần lượt là các vec tơ vuông góc với các mặt phẳng $(ACD), (ABD), (ACB)$. Từ đó ta có:

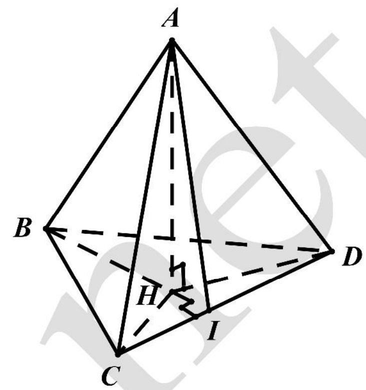
$$\cos\alpha = \frac{|\vec{b}.\overrightarrow{AH}|}{|\vec{b}||\overrightarrow{AH}|} = \frac{\dfrac{b^2c^2d^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}}{b\sqrt{\dfrac{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}{b^2c^2d^2}}} = \frac{cd}{\sqrt{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}}$$

Tương tự :

$\cos\beta = \frac{\left|\vec{c}.\overrightarrow{AH}\right|}{\left|\vec{b}\right|\left|\overrightarrow{AH}\right|} = \frac{bd}{\sqrt{b^2c^2 + c^2d^2 + d^2b^2}}, \cos\gamma = \frac{\left|\vec{d}.\overrightarrow{AH}\right|}{\left|\vec{b}\right|\left|\overrightarrow{AH}\right|} = \frac{bc}{\sqrt{b^2c^2 + c^2d^2 + d^2b^2}}$

Suy ra $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

b) Sử dụng công thức hình chiếu



Gọi H là hình chiếu của A trên (BCD).

Trước tiên ta chứng minh tam giác BCD nhọn.

Không giảm tổng quát, giả sử B lớn nhất.

Ta có $CD^2 = AC^2 + AD^2 = c^2 + d^2$

Tương tự $CB^2 = b^2 + c^2, DB^2 = b^2 + d^2$

Áp dụng định lí côsin cho ΔBCD ta có

$\cos B = \frac{BC^2 + BD^2 - CD^2}{2BC.BD}$

$= \frac{(b^2 + c^2) + (b^2 + d^2) - (c^2 + d^2)}{2\sqrt{(b^2 + c^2)(b^2 + d^2)}}$

$= \frac{2b^2}{2\sqrt{(b^2 + c^2)(b^2 + d^2)}} > 0$ do đó B nhọn, hay tam giác BCD nhọn.

Ta có $\begin{cases} AH \perp CD \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow BH \perp CD$, tương tự ta có $CH \perp BD$ từ đó suy ra H là trực tâm của ΔBCD, mà ΔBCD nhọn nên H thuộc miền trong tam giác BCD. Do đó

$S_{BCD} = S_{HBC} + S_{HBD} + S_{HCD} = S_{ABC}\cos\gamma + S_{ABD}\cos\beta + S_{ACD}\cos\alpha$

$= \frac{1}{2}bc\cos 60^0 + \frac{1}{2}bd\cos 45^0 + \frac{1}{2}cd\cos 30^0 = \frac{bc + \sqrt{2}bd + \sqrt{3}cd}{4}$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AB = 2a$; cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$.

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Lời giải.

a) Gọi $I = AD \cap BC$ thì $SI = (SAD) \cap (SBC)$. $\begin{cases} BD \perp AD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp SI$.

Dựng $DE \perp SI, E \in SI$ khi đó $(BDE) \perp SI$. Do đó BED là góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Do đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nên $IAB = IBA = 60^0 \Rightarrow \Delta IBA$ đều.

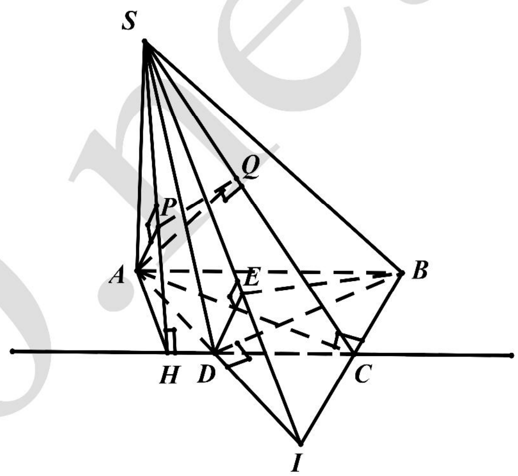
Vì vậy $AI = AB = 2a$, $SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(2a\right)^2} = a\sqrt{7}$.

Dễ thấy $\Delta SAI \sim \Delta DEI \Rightarrow \dfrac{DE}{SA} = \dfrac{DI}{SI} = \dfrac{a}{a\sqrt{7}} = \dfrac{1}{\sqrt{7}} \Rightarrow DE = \dfrac{SA}{\sqrt{7}} = a\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

$BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp DE$. Trong tam giác vuông BDE ta có

$\tan BED = \dfrac{BD}{DE} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{\dfrac{3}{7}}} = \sqrt{7} \Rightarrow BED = \arctan\sqrt{7}$.

Vậy $\left((SAD),(SBC)\right) = \arctan\sqrt{7}$



b) Dựng $AP \perp SH, P \in SH$.

Do $CD \perp (SAH) \Rightarrow AP \perp CD \Rightarrow AP \perp (SCD)$.

Tương tự, dựng $AQ \perp SC, Q \in SC$ thì $AQ \perp (SBC)$

.

Do đó $PAQ = \left((SBC),(SCD)\right)$.

Trong tam giác SAH ta có :

$\dfrac{1}{AP^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{5}{3a^2}$

$\Rightarrow AP = a\sqrt{\dfrac{5}{3}}$

Dễ thấy ΔSAC vuông cân tại A nên $AQ = \dfrac{1}{2}SC = \dfrac{SA\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

$AP \perp (SCD) \Rightarrow AP \perp PQ$.

Trong ΔAPQ có $\cos APQ = \dfrac{AP}{AQ} = \dfrac{a\sqrt{\dfrac{3}{5}}}{\dfrac{a\sqrt{6}}{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow APQ = \arccos\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

Vậy $\left((SBC),(SCD)\right) = \arccos\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.