

Vấn đề 1. Tìm giới hạn bằng định nghĩa

Phương pháp:

Sử dụng định nghĩa chuyển giới hạn của hàm số về giới hạn của dãy số.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm giới hạn các hàm số sau bằng định nghĩa :

1. $A = \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + x + 1)$

2. $B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

3. $C = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$

4. $D = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{x - 1}$

Lời giải.

1. Với mọi dãy (x_n) mà $\lim x_n = 1$ ta có:

$$A = \lim (3x_n^2 + x_n + 1) = 3 + 1 + 1 = 5$$

2. Với mọi dãy (x_n) mà $\lim x_n = 1$ và $x_n \neq 1 \forall n$ ta có:

$$B = \lim \frac{(x_n - 1)(x_n^2 + x_n + 1)}{x_n - 1} = \lim (x_n^2 + x_n + 1) = 3.$$

3. Với mọi dãy (x_n) mà $\lim x_n = 2$ và $x_n \neq 2 \forall n$ ta có:

$$B = \lim \frac{\sqrt{x_n + 2} - 2}{x_n - 2} = \lim \frac{(x_n - 2)}{(x_n - 2)(\sqrt{x_n + 2} + 2)} = \lim \frac{1}{\sqrt{x_n + 2} + 2} = \frac{1}{4}$$

4. Với mọi dãy (x_n) mà $\lim x_n = +\infty$ ta có:

$$D = \lim \frac{3x_n + 2}{x_n - 1} = \lim \frac{3 + \frac{2}{x_n}}{1 - \frac{1}{x_n}} = 3.$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng hàm số sau không có giới hạn:

1. $f(x) = \sin \frac{1}{\sqrt{x}}$ khi $x \rightarrow 0$

2. $f(x) = \cos^5 2x$ khi $x \rightarrow -\infty$.

Lời giải.

1. Xét hai dãy $(x_n): x_n = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + n2\pi\right)^2}, (y_n): y_n = \frac{1}{(n\pi)^2}$

Ta có: $\lim x_n = \lim y_n = 0$ và $\lim f(x_n) = 1; \lim f(y_n) = 0$.

Nên hàm số không có giới hạn khi $x \rightarrow 0$.

2. Tương tự ý 1 xét hai dãy: $x_n = n\pi$; $y_n = \frac{\pi}{4} + n\pi$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Lời giải.

Với mọi dãy $(x_n): \lim x_n = x_0$ ta có: $\lim |f(x_n)| = 0 \Rightarrow \lim f(x_n) = 0$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Tìm giới hạn các hàm số sau bằng định nghĩa

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 1)$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{x-2}$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x+2}$

6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+2}{2x-1}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{2x}$

8. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x-3}{x-1}$

9. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x-1}{x-2}$

Bài 2 Chứng minh rằng các hàm số sau không có giới hạn :

1. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ khi $x \rightarrow 0$

2. $f(x) = \cos x$ khi $x \rightarrow +\infty$

Bài 3 Bằng định nghĩa hãy tìm các giới hạn sau

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x-1}$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{(2-x)^4}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{2x^2 + 1}$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x - 1)$

5. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{(x^4 + 1)(2-x)}}$

6. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 3x + 2}{|x+1|}$

Bài 4 Chứng minh rằng các hàm số sau không có giới hạn

1. $f(x) = \cos \frac{1}{x^2}$ khi $x \rightarrow 0$

2. $f(x) = \sin 2x$ khi $x \rightarrow +\infty$