## B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

### DẠNG 1: Nhận dạng phương trình đường tròn. Tìm tâm và bán kính đường tròn.

**1. Phương pháp giải.**

*Cách 1:* + Đưa phương trình về dạng:

$C\ : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (1)

+ Xét dấu biểu thức $P = a^2 + b^2 - c$

Nếu $P > 0$ thì (1) là phương trình đường tròn $C$ có tâm $I\ a;b$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

Nếu $P \le 0$ thì (1) không phải là phương trình đường tròn.

*Cách 2:* Đưa phương trình về dạng: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = P$ (2).

Nếu $P > 0$ thì (2) là phương trình đường tròn có tâm $I\ a;b$ và bán kính $R = \sqrt{P}$

Nếu $P \le 0$ thì (2) không phải là phương trình đường tròn.

**2. Các ví dụ.**

***Ví dụ 1:*** Trong các phương trình sau, phương trình nào biểu diễn đường tròn? Tìm tâm và bán kính nếu có.

$a)\ x^2 + y^2 + 2x - 4y + 9 = 0$ (1)

$b)\ x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$ (2)

$c)\ 2x^2 + 2y^2 - 6x - 4y - 1 = 0$ (3)

$d)\ 2x^2 + y^2 + 2x - 3y + 9 = 0$ (4)

***Lời giải:***

a) Phương trình (1) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a = -1;\ b = 2;\ c = 9$

Ta có $a^2 + b^2 - c = 1 + 4 - 9 < 0$

Vậy phương trình (1) không phải là phương trình đường tròn.

b) Ta có: $a^2 + b^2 - c = 9 + 4 - 13 = 0$

Suy ra phương trình (2) không phải là phương trình đường tròn.

c) Ta có:

$$3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 3x - 2y - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 +\ y - 1\ ^2 = \frac{5}{2}$$

Vậy phương trình (3) là phương trình đường tròn tâm $I\left(\frac{3}{2};1\right)$ bán kính

$R=\frac{\sqrt{10}}{2}$

d) Phương trình (4) không phải là phương trình đường tròn vì hệ số của $x^2$ và $y^2$ khác nhau.

***Ví dụ 2:*** Cho phương trình $x^2+y^2-2mx-4\ \ m-2\ \ y+6-m=0$ (1)

a) Tìm điều kiện của $m$ để (1) là phương trình đường tròn.

b) Nếu (1) là phương trình đường tròn hãy tìm toạ độ tâm và bán kính theo m

***Lời giải:***

a) Phương trình (1) là phương trình đường tròn khi và chỉ khi

$a^2+b^2-c>0$

Với $a=m; b=2\ \ m-2\ \ ; c=6-m$

Hay

$$m^2+4\ \ m-2\ ^2-6+m>0\Leftrightarrow 5m^2-15m+10>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2\\ m<1\end{array}\right.$$

b) Với điều kiện trên thì đường tròn có tâm $I\ \ m;2\ \ m-2$ và bán kính:

$R=\sqrt{5m^2-15m+10}$

***Ví dụ 3:*** Cho phương trình đường cong $(C_m)$:

$x^2+y^2+\ \ m+2\ \ x-\ \ m+4\ \ y+m+1=0$ (2)

a) Chứng minh rằng (2) là phương trình một đường tròn

b) Tìm tập hợp tâm các đường tròn khi m thay đổi

c) Chứng minh rằng khi m thay đổi họ các đường tròn $(C_m)$ luôn đi qua hai điểm cố định.

***Lời giải:***

a) Ta có

$$a^2+b^2-c=\left(\frac{m+2}{2}\right)^2+\left(-\frac{m+4}{2}\right)^2-m-1=\frac{m+2\ ^2+4}{2}>0$$

Suy ra (2) là phương trình đường tròn với mọi m

b) Đường tròn có tâm I : $\begin{cases} x_I = -\dfrac{m+2}{2} \\ y_I = \dfrac{m+4}{2} \end{cases}$ suy ra $x_I + y_I - 1 = 0$

Vậy tập hợp tâm các đường tròn là đường thẳng $\Delta : x + y - 1 = 0$

c) Gọi $M\ \ x_0; y_0$ là điểm cố định mà họ $(C_m)$ luôn đi qua.

Khi đó ta có: $x_o^2 + y_0^2 + \ \ m+2\ \ x_0 - \ \ m+4\ \ y_0 + m + 1 = 0,\ \forall m$

$\Leftrightarrow\ \ x_0 - y_0 - 1\ \ m + x_o^2 + y_0^2 + 2x_0 - 4y_0 + 1 = 0,\ \forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - y_0 + 1 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 4y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases}$

Vậy có hai điểm cố định mà họ $(C_m)$ luôn đi qua với mọi m là $M_1\ \ -1; 0$ và

$M_2\ \ 1; 2$

**3. Bài tập luyện tập.**

**Bài 3.71:** Trong các phương trình sau đây, phương trình nào là phương trình của một đường tròn. Xác định tâm và tính bán kính của nó.

a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$. b) $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 16 = 0$.

c) $x^2 - y^2 + 4x - 5y + 1 = 0$. d) $2x^2 + 2y^2 - 3x - 2 = 0$

**Bài 3.72:** Cho phương trình :

$x^2 + y^2 + 6mx - 2(m-1)y + 11m^2 + 2m - 4 = 0$.

a) Tìm điều kiện của $m$ để pt trên là pt đường tròn.

b) Tìm quỹ tích tâm đường tròn.

**Bài 3.73:** Cho phương trình $(C_m)$:

$x^2 + y^2 + 2(m-1)x - 2(m-3)y + 2 = 0$.

a) Tìm $m$ để $(C_m)$ là phương trình của một đường tròn.

b) Tìm $m$ để $(C_m)$ là đường tròn tâm $I(1;-3)$. Viết phương trình đường tròn này.

c) Tìm $m$ để $(C_m)$ làđường tròn có bán kính $R = 5\sqrt{2}$. Viết phương trình đường tròn đó

**Bài 3.74:** Cho $A\ \ -1; 0$ , $B\ \ 2; 4$ và $C\ \ 4; 1$ . Chứng minh rằng tập hợp các điểm M thoả mãn $3MA^2 + MB^2 = 2MC^2$ là một đường tròn (C). Tìm tọa độ tâm và tính bán kính của (C).