B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG.

Phương pháp:

Muốn chứng minh đương thẳng $d\perp(\alpha)$ ta có thể dùng môt trong hai cách sau.

Cách 1. Chứng minh d vuông góc với hai đường thẳng a,b cắt nhau trong (α).

$$\begin{cases} d\perp a \\ d\perp b \\ a\subset(\alpha), b\subset(\alpha) \\ a\cap b=I \end{cases} \Rightarrow a\perp(\alpha)$$

Cách 2. Chứng minh d vuông góc với đường thẳng a mà a vuông góc với (α).

$$\begin{cases} d\parallel a \\ (\alpha)\perp a \end{cases} \Rightarrow d\perp(\alpha).$$

Các ví dụ

Ví dụ 1. ***Ví dụ 1.*** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O và có $SA\perp(ABCD)$. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB,SC và SD.

a) Chứng minh $BC\perp(SAB), CD\perp(SAD), BD\perp(SAC)$.

b) Chứng minh $SC\perp(AHK)$ và điểm I thuộc mặt phẳng (AHK).

c) Chứng minh $HK\perp(SAC)$ và $HK\perp AI$.

Lời giải.

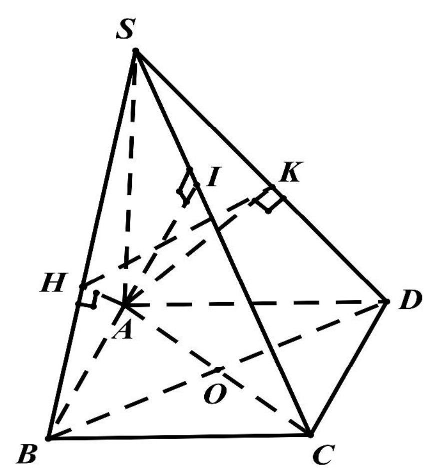
a) Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BC\perp AB$,

lại có $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp BC$.

Vậy $\begin{cases} BC\perp AB \\ BC\perp SA \end{cases} \Rightarrow BC\perp(SAB)$.

Tương tự $\begin{cases} CD\perp AD \\ CD\perp SA \end{cases} \Rightarrow CD\perp(SAD)$.

Ta có đáy $ABCD$ là hình vuông nên $BD\perp AC$, $BD\perp SA\Rightarrow BD\perp(SAC)$.



b) Ta có $\begin{cases} BC\perp(SAB) \\ AH\subset(SAB) \end{cases} \Rightarrow BC\perp AH$.

Vậy $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.

Tương tự $\begin{cases} AK \perp SD \\ AK \perp CD \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$.

Vậy $\begin{cases} SC \perp AH \\ SC \perp AK \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK)$.

$\begin{cases} A \in (AHK) \\ AI \perp SC \\ SC \perp (AHK) \end{cases} \Rightarrow AI \subset (AHK)$.

c) $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AD \end{cases}$.

Hai tam giác vuông SAB và SAD bằng nhau (do có SA chung và $AB = AD$)

suy ra $SB = SD, SH = SK \Rightarrow \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{SK}{SD} \Rightarrow HK \,//\, BD$

Mặt khác $BD \perp AC \Rightarrow HK \perp AC$.

Vậy $\begin{cases} HK \perp SC \\ HK \perp AC \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SAC)$.

$\begin{cases} AI \subset (SAC) \\ HK \perp (SAC) \end{cases} \Rightarrow HK \perp AI$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (ABC). Chứng minh:

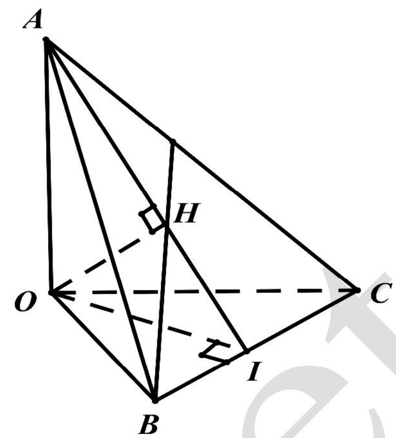
a) $BC \perp (OAH)$

b) H là trực tâm của ΔABC

c) $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Lời giải.

a) Ta có $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC \quad (1)$



Lại có $\begin{cases} OH \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow OH \perp BC \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (OAH)$.

b) Do $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp AC \quad (3)$

$\begin{cases} OB \perp OA \\ OB \perp OC \end{cases} \Rightarrow OB \perp (OAC) \Rightarrow OB \perp AC \quad (4)$ Từ

(3) và (4) suy ra $AC \perp (OBH) \Rightarrow AC \perp BH \quad (5)$

Lại có $BC \perp (OAH) \Rightarrow AH \perp BC \quad (6)$. Từ

$(5),(6)$ suy ra H là trực tâm của tam giác ABC.

c) Gọi $I = AH \cap BC$, do $\begin{cases} OI \subset (OAH) \\ BC \perp (OAH) \end{cases} \Rightarrow BC \perp OI$

Ta giác OAI vuông tại O có đường cao OH nên ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OI^2} \quad (*)$.

Tương tự cho tam giác OBC ta có $\dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$ thay vào (*) thư được

$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Ví dụ 3. Cho đường tròn (C) đường kính AB trong mặt phẳng (α), một đường thẳng d vuông góc với (α) tại A; trên d lấy điểm $S \neq A$ và trên (C) lấy điểm M (M khác A,B).

a) Chứng minh $MB \perp (SAM)$.

b) Dựng AH vuông góc với SB tại H; AK vuông góc với SM tại K. Chứng minh $AK \perp (SBM), SB \perp (AHM)$

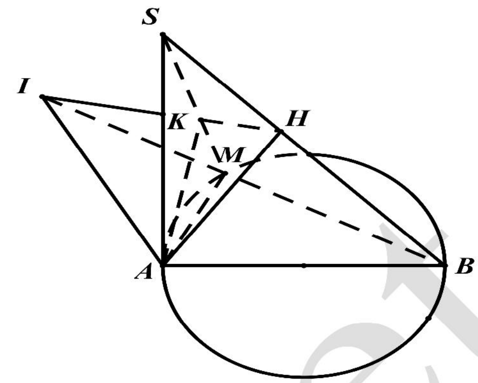
c) Gọi I là giao điểm của HK và MB. Chứng minh AI là tiếp tuyến của đường tròn (C).

Lời giải.

a) Ta có $\begin{cases} SA \perp (\alpha) \\ MB \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow SA \perp MB \quad (1)$

Lại có $MB \perp MA \quad (2)$ (t/c góc chắn nửa đường tròn)

Từ $(1),(2)$ suy ra $MB\perp(SAM)$.



b) Ta có $AK\perp SM$,

$MB\perp(SAM), AK\subset(SAM)\Rightarrow MB\perp AK$.

Suy ra $AK\perp(SBM)$.

Tương tự $\begin{cases}AK\perp(SBM)\\SB\subset(SBM)\end{cases}\Rightarrow AK\perp SB$,

lại có $AH\perp SB$ suy ra $SB\perp(AHK)$.

c) Ta có $\begin{cases}AI\subset(AHK)\\SB\perp(AHK)\end{cases}\Rightarrow AI\perp SB\quad(3)$

$\begin{cases}AI\subset(\alpha)\\SA\perp(\alpha)\end{cases}\Rightarrow AI\perp SA\quad(4)$. Từ $(3),(4)$ suy ra $AI\perp(SAB)\Rightarrow AI\perp AB$ hay AI là tiếp tuyến của đường tròn (C).

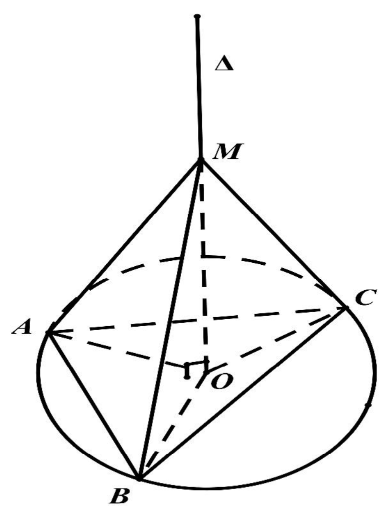
Ví dụ 4. Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A có góc $A=120^0$, cạnh $BC=a\sqrt{3}$. Lấy điểm $S\notin(ABC)$ sao cho $SA=a$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC. Chứng minh $AO\perp(SBC)$.

Lời giải.

Để giải bài toán này, trước tiên chúng ta chứng minh một kết quả sau:

Trong không gian tập hợp các điểm cách đều ba đỉnh của một tam giác là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp và vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác đó. (đường thẳng này được gọi là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó).

Chứng minh: Gọi M là điểm cách đều ba đỉnh của tam giác ABC và O là hình chiếu của trên của M trên (ABC).



Các tam giác vuông MOA, MOB, MOC có MO chung.
Vậy $MA=MB=MC\Leftrightarrow OA=OB=OC\Leftrightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Vậy tập hợp các điểm M cách đều ba đỉnh của tam giác là đường thẳng vuông góc với mạt phẳng (ABC) tại tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Quay lại bài toán

Gọi M là trung điểm của BC, ta có ΔABC cân tại $A\Rightarrow AM\perp BC$.

$AB = \frac{BM}{\sin 60^0} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = a$. Mặt khác $AC = a$ suy ra $AS = AB = AC = a$, điểm A cách đều ba đỉnh S,B,C của ΔSBC, do đó gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSBC thì AO là trục đường tròn ngoại tiếp ΔSBC suy ra $AO \perp (SBC)$.