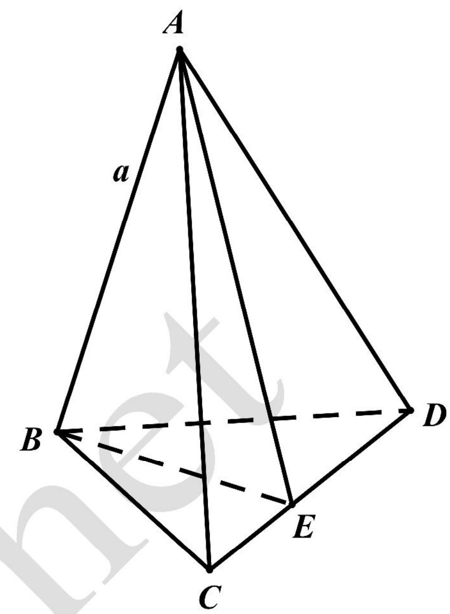
**Hệ quả:**

Mặt phẳng phân giác của góc nhị diện cạnh $AB$ cắt tứ diện theo thiết diện có diện tích $S=\dfrac{2S_1S_2}{S_1+S_2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$




***Chứng minh:***

Gọi $E$ là giao điểm của mặt phẳng phân giác của góc nhị diện cạnh $AB$, ta có

$V_{ABCD}=V_{ABEC}+V_{ABED}$

$$\Leftrightarrow \frac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}=\frac{2S_1S\sin\frac{\alpha}{2}}{3a}+\frac{2S_2S\sin\frac{\alpha}{2}}{3a}$$

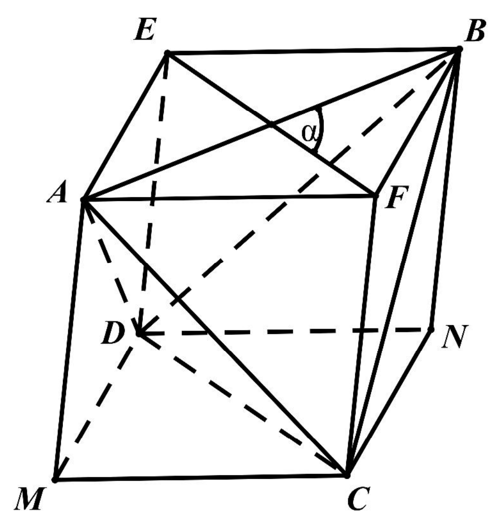
$$\Leftrightarrow 2S_1S_2\cos\frac{\alpha}{2}=\left(S_1+S_2\right)S \Leftrightarrow S=\frac{2S_1S_2\cos\frac{\alpha}{2}}{S_1+S_2}$$

(đpcm).

**3.2.** Thể tích tứ diện $ABCD$ là $V=\dfrac{1}{6}AB.CD.d.\sin\varphi$, trong đó $d$ là khoảng cách giữa hai đường thẳng $AB$ và $CD$, $\varphi$ là góc giữa chúng.

***Chứng minh:***

Dựng hình hộp $AEBF.CMDN$ ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ ( như hình vẽ).




Ta có $EF \,//\, CD$ nên $\left(AB,EF\right)=\left(AB,CD\right)=\alpha$.

Vì $AEBF$ là hình bình hành nên

$S_{AEBF}=\dfrac{1}{2}AB.EF\sin\alpha=\dfrac{1}{2}AD.CD\sin\alpha$

Do đường cao của hình hộp là

$h=d\left(\left(AEBF\right),\left(CMDN\right)\right)$

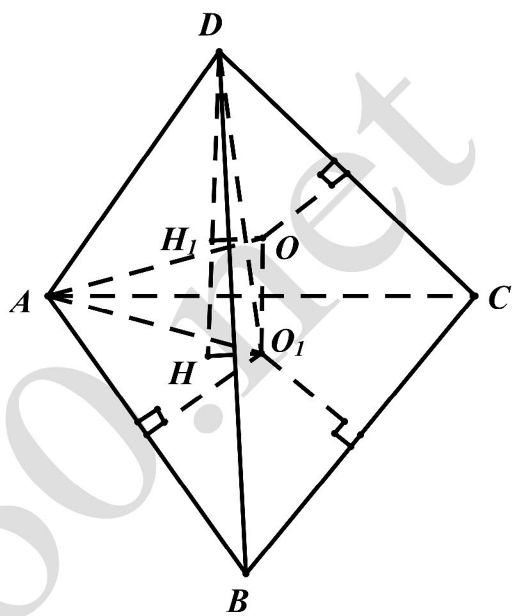
$=d\left(AB,CD\right)=d$

nên thể tích khối hộp là $V_{hh}=\dfrac{1}{2}AD.CD.d\sin\alpha$.

Dễ thấy $V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}V_{hh}=\dfrac{1}{6}AB.AD.d\sin\alpha$ ( đpcm).

**3.3.** Gọi $S_i, R_i$ và $l_i\ (i=1,4)$ là diện tích các mặt, bán kính đường tròn ngoại tiếp các mặt đó và khoảng cách từ tâm các đường tròn đó đến các đỉnh đối diện của tứ diện thì $V=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4} S_i^2\left(l_i^2-R_i^2\right)}{2}}$

***Chứng minh:***




Trước tiên ta xét tâm mặt cầu ngoại tiếp nằm trong tứ diện.

Gọi $R_1, h_1, l_1, d_1$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$, đường cao $DH$, và khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ đến $d$. Gọi $O, O_1$ lần lượt là tâm mặt cầu và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$, $H_1$ là hình chiếu của $O$ trên $DH$. Đặt $OO_1=d_1$ và $R$ là bán kính mặt cầu.

Ta có $O_1H^2=O_1D^2-DH^2=l_1^2-h_1^2$

$OH_1^2=OD^2-DH_1^2=R^2-\left(h_1-d_1\right)^2$

$R^2-d_1^2+2h_1d_1-h_1^2$. Vì $O_1H=OH_1$

nên $R^2-d_1^2+2h_1d_1-h_1^2=l_1^2-h_1^2 \Leftrightarrow l_1^2-R^2+d_1^2=2h_1d_1$.

Lại có $R^2-d_1^2=OA^2-OO_1^2=AO_1^2=R_1^2$ nên $l_1^2-R_1^2=2h_1d_1$.

Tương tự $l_i^2-R_i^2=2h_id_i\ (i=2,3,4)$.

Do đó $\sum_{i=1}^{4} S_i^2\left(l_i^2-R_i^2\right)=\sum_{i=1}^{4} 2S_i^2h_id_i=\sum_{i=1}^{4} 2\left(S_ih_i\right)^2\left(\frac{d_i}{h_i}\right)=\sum_{i=1}^{4} 18V^2\left(\frac{d_i}{h_i}\right)$

Mà $\sum_{i=1}^{4}\frac{d_i}{h_i}=1$ nên $V=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4} S_i^2\left(l_i^2-R_i^2\right)}{2}}$.

Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích $V$ và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện bằng $R$. Chứng minh rằng $AB.CD;\ AC.DB;\ AD.BC$ là số đo ba cạnh của một tam giác nào đó. Gọi $S$ là diện tích tam giác đó. Chứng minh $S=6VR$ (công thức Crelle)

***Chứng minh:***

Gọi $O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ và $A'$ là điểm đối xứng của $A$ qua $O$. $H$ là trung điểm của $AO$. Gọi $(P)$ là mặt phẳng qua $H$ và vuông góc với AO, $B', C', D'$ lần lượt là giao điểm của $(P)$ với $AB, AC, AD$. Ta có các tam giác vuông $AHB', ABA'$ đồng dạng nên $\frac{AB'}{AH} = \frac{AA'}{AB} \Rightarrow AB.AB' = AH.AA'$

$= \frac{1}{2}R.2R = R^2 \Rightarrow AB.AB' = R^2$.

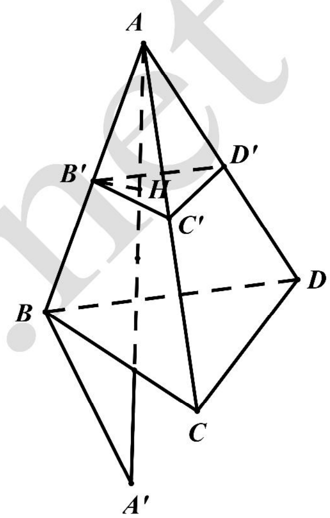
Tương tự ta có : $AC.AC' = AD.AD' = R^2$

$\Rightarrow AB.AB' = AC.AC' = AD.AD'$

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

$\Rightarrow B'C' = \frac{BC.AC'}{AB} = \frac{BC.AC'.AC.AD}{AB.AC.AD} = \frac{AD.BC.R^2}{AB.AC.AD}$

$\Rightarrow \frac{B'C'}{AD.BC} = \frac{R^2}{AB.AC.AD}$.




Tương tự ta có:

$\frac{B'C'}{AD.BC} = \frac{C'D'}{AB.CD} = \frac{D'B'}{AC.DB} = \frac{R^2}{AB.AC.AD}$

Vậy là 3 cạnh của một tam giác đồng dạng với tam giác $A'B'C'$.

Ta có $\frac{S}{S_{\Delta B'C'D'}} = \left(\frac{AB.AC.AD}{R^2}\right)^2$

$\Rightarrow S = \left(\frac{AB.AC.AD}{R^2}\right)^2 S_{\Delta B'C'C'} = \left(\frac{AB.AC.AD}{R^2}\right)^2 . \frac{3V_{A.B'C'D'}}{AH}$

$= 6\frac{(AB.AC.AD)^2}{R^5} . \frac{V_{A.B'C'D'}}{V_{A.BCD}} . V_{ABCD} = 6\frac{(AB.AC.AD)^2}{R^5} \frac{AB'AC'AD'}{AB.AC.AD} . V$

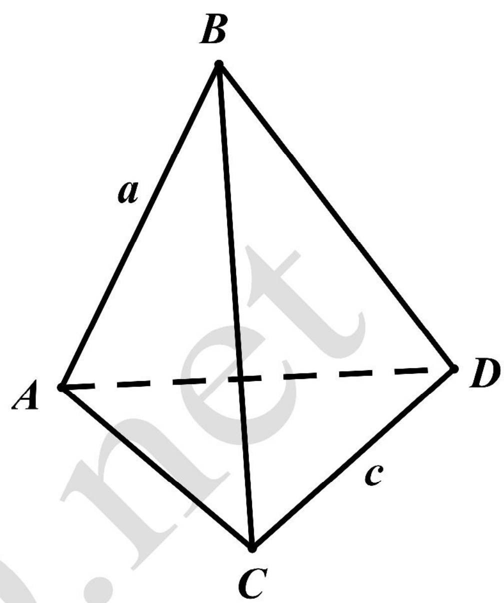
$= 6\frac{(AB.AB')(AC.AC')(AD.AD')}{R^5} V = 6\frac{R^6}{R^5} V = 6VR$.

**4. Định lí sin trong tứ diện**

Cho tứ diện $ABCD$, có $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = e, BD = f$ Gọi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi, \lambda$ lần lượt là góc nhị diện các cạnh $AB, BC, CD, DA, AC, BD$

thì $\dfrac{ac}{\sin\alpha\sin\gamma}=\dfrac{bd}{\sin\beta\sin\delta}=\dfrac{ef}{\sin\varphi\sin\lambda}$

*Chứng minh:*




Đặt $S_i\left(i=\overline{1,4}\right)$ lần lượt là diện tích các mặt đối diện với các đỉnh $A,B,C,D$.

Ta có $V=\dfrac{2S_3S_4\sin\alpha}{3a}$ và $V=\dfrac{2S_1S_2\sin\gamma}{3c}$

$\Rightarrow\dfrac{4S_1S_2S_3S_4\sin\alpha\sin\gamma}{9ac}=V^2$

$\Rightarrow\dfrac{ac}{\sin\alpha\sin\beta}=\dfrac{4S_1S_2S_3S_4}{9V^2}$.

Tương tự

$\dfrac{bd}{\sin\beta\sin\delta}=\dfrac{4S_1S_2S_3S_4}{9V^2}$ $\dfrac{ef}{\sin\varphi\sin\lambda}=\dfrac{4S_1S_2S_3S_4}{9V^2}$

.

Vậy $\dfrac{ac}{\sin\alpha\sin\gamma}=\dfrac{bd}{\sin\beta\sin\delta}=\dfrac{ef}{\sin\varphi\sin\lambda}$.