Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho hai số không âm x, y. Ta có: $x+y\ge 2\sqrt{xy}=2\sqrt{36}=12$.

Câu 19. Cho hai số x, y dương thoả $x+y=12$, bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\sqrt{xy}\le 6$.

B. $xy<\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=36$.

C. $2xy<x^2+y^2$.

D. $\sqrt{xy}\ge 6$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho hai số không âm x, y. Ta có: $\sqrt{xy}\le\dfrac{x+y}{2}=6$.

Câu 20. Cho x, y là hai số thực bất kỳ thỏavà $xy=2$. Giá trị nhỏ nhất của $A=x^2+y^2$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho hai số không âm x^2 và y^2. Ta có:

$A=x^2+y^2\ge 2\sqrt{x^2y^2}=2\sqrt{(xy)^2}=4$. Đẳng thức xảy ra $x=y=\sqrt{2}$.

Câu 21. Cho $a>b>0$ và $x=\dfrac{1+a}{1+a+a^2}$, $y=\dfrac{1+b}{1+b+b^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $x>y$.

B. $x<y$.

C. $x=y$.

D. Không so sánh được.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $\dfrac{1}{x}=a+\dfrac{1}{a+1}$ và $\dfrac{1}{y}=b+\dfrac{1}{b+1}$.

Suy ra: $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=(a-b)\left[1-\dfrac{1}{(a+1)(b+1)}\right]$

Do $a>b>0$ nên $a+1>1$ và $b+1>1$ suy ra: $\dfrac{1}{(a+1)(b+1)}<1\Rightarrow 1-\dfrac{1}{(a+1)(b+1)}>0$.

Vậy $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}>0\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}$ do $x>0$ và $y>0$ nên $\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}\Leftrightarrow x<y$.

Câu 22. Với $a,b,c,d>0$. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề **sai?**

A. $\dfrac{a}{b}<1\Rightarrow\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+c}$.

B. $\dfrac{a}{b}>1\Rightarrow\dfrac{a}{b}>\dfrac{a+c}{b+c}$.

C. $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}\Rightarrow\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}$.

D. Có ít nhất hai trong ba mệnh đề trên là sai.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $\dfrac{a}{b}-\dfrac{a+c}{b+c}=\dfrac{(a-b)c}{b(b+c)}$ suy ra A, B đúng.

Câu 23. Hai số a,b thoả bất đẳng thức $\dfrac{a^2+b^2}{2}\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ thì

A. $a<b$. **B.** $a>b$. **C.** $a=b$. **D.** $a\ne b$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$\dfrac{a^2+b^2}{2}\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\Leftrightarrow 2a^2+2b^2\le(a+b)^2\Leftrightarrow(a-b)^2\le 0\Leftrightarrow a=b$.

Câu 24. Cho $a,b>0$. Chứng minh $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$. Một học sinh làm như sau:

I) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2 \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{ab}\ge 2\ (1)$

II) $(1)\Leftrightarrow a^2+b^2\ge 2ab \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab\ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0$.

III) và $(a-b)^2\ge 0$ đúng $\forall a,b>0$ nên $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$.

Cách làm trên :

A. Sai từ I). **B.** Sai từ II).
C. Sai ở III). **D.** Cả I), II), III) đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Câu 25. Cho $a,b,c>0$. Xét các bất đẳng thức sau:

I) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$. II) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 3$. III) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 4$.

Bất đẳng thức nào đúng?

A. Chỉ I) đúng. **B.** Chỉ II) đúng. **C.** Chỉ III) đúng. **D.** Cả ba đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}}=2\Rightarrow (I)$ đúng; $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{a}}=3\Rightarrow (II)$ đúng;

$$\left.\begin{array}{l} a+b\ge 2\sqrt{ab} \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge 2\sqrt{\frac{1}{ab}} \end{array}\right\}\Rightarrow (a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 4\Rightarrow (III) \text{ đúng.}$$

Câu 26. Cho các bất đẳng thức: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2\ (I)$, $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 3\ (II)$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge \frac{9}{a+b+c}\ (III)$ (với $a,b,c>0$). Bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức trên là đúng?

A. chỉ I đúng. **B.** chỉ II đúng. **C.** chỉ III đúng. **D.** I,II,III đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}}=2\Rightarrow (I)$ đúng; $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{a}}=3\Rightarrow (II)$ đúng;

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \\ a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc} \end{array}\right.\Rightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge \frac{9}{a+b+c}\Rightarrow (III) \text{ đúng.}$$

Câu 27. Cho $a,b,c>0$. Xét các bất đẳng thức:

I) $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$ II) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$ III) $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 9$.

Bất đẳng thức nào đúng:

A. Chỉ I) và II) đúng. **B.** Chỉ I) và III) đúng.
C. Chỉ I) đúng. **D.** Cả ba đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

- $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow (I)$ đúng;

- $\begin{cases} \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{abc}} \\ a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc} \end{cases} \Rightarrow (a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \ge 9 \Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \ge \dfrac{9}{a+b+c} \Rightarrow (II)$ đúng;
- $a+b \ge 2\sqrt{ab}$; $b+c \ge 2\sqrt{bc}$; $c+a \ge 2\sqrt{ca} \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc \Rightarrow (III)$ sai.

Câu 28. Cho $a,b,c>0$. Xét các bất đẳng thức:

I) $\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\left(1+\dfrac{b}{c}\right)\left(1+\dfrac{c}{a}\right) \ge 8$.   II) $\left(\dfrac{2}{a}+b+c\right)\left(\dfrac{2}{b}+c+a\right)\left(\dfrac{2}{c}+a+b\right) \ge 64$.

III) $a+b+c \le abc$. Bất đẳng thức nào đúng?

A. Chỉ I) đúng.   **B.** Chỉ II) đúng.

C. Chỉ I) và II) đúng.   **D.** Cả ba đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$1+\dfrac{a}{b} \ge 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}$; $1+\dfrac{b}{c} \ge 2\sqrt{\dfrac{b}{c}}$; $1+\dfrac{c}{a} \ge 2\sqrt{\dfrac{c}{a}} \Rightarrow \left(1+\dfrac{a}{b}\right)\left(1+\dfrac{b}{c}\right)\left(1+\dfrac{c}{a}\right) \ge 8\sqrt{\dfrac{a}{b}\dfrac{b}{c}\dfrac{c}{a}} = 8 \Rightarrow (I)$ đúng.

$\dfrac{1}{a}+b \ge 2\sqrt{\dfrac{b}{a}}$; $\dfrac{1}{a}+c \ge 2\sqrt{\dfrac{c}{a}} \Rightarrow \dfrac{2}{a}+b+c \ge 2\sqrt{4\sqrt{\dfrac{bc}{a^2}}} = 4\sqrt[4]{\dfrac{bc}{a^2}}$.

Tương tự: $\dfrac{2}{b}+c+a \ge 4\sqrt[4]{\dfrac{ac}{b^2}}$; $\dfrac{2}{c}+a+b \ge 4\sqrt[4]{\dfrac{ab}{c^2}}$.

Suy ra: $\left(\dfrac{2}{a}+b+c\right)\left(\dfrac{2}{b}+c+a\right)\left(\dfrac{2}{c}+a+b\right) \ge 64 \Rightarrow (II)$ đúng.

Ta có: $3\sqrt[3]{abc} \le a+b+c \le abc \Leftrightarrow \sqrt[3]{(abc)^2} \ge 3 \Leftrightarrow abc \ge 3\sqrt{3} \Rightarrow (III)$ sai.

Câu 29. Cho $x,y,z>0$ và xét ba bất đẳng thức(I) $x^3+y^3+z^3 \ge 3xyz$; (II) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \le \dfrac{9}{x+y+z}$; (III) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x} \ge 3$. Bất đẳng thức nào là đúng?

A. Chỉ I đúng.   **B.** Chỉ I và III đúng.   **C.** Chỉ III đúng.   **D.** Cả ba đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$x^3+y^3+z^3 \ge 3\sqrt[3]{x^3y^3z^3} = 3xyz \Rightarrow (I)$ đúng;

$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{xyz}} \\ x+y+z \ge 3\sqrt[3]{xyz} \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)(x+y+z) \ge 9 \Rightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \ge \dfrac{9}{x+y+z} \Rightarrow (II)$ sai;

$\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}.\dfrac{y}{z}.\dfrac{z}{x}} = 3 \Rightarrow (III)$ đúng.

Câu 30. Cho $a,b>0$ và $ab>a+b$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+b=4$.   **B.** $a+b>4$.   **C.** $a+b<4$.   **D.** $a+b \le 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có: $ab \le \dfrac{(a+b)^2}{4}$.

Do đó: $ab>a+b \Leftrightarrow \dfrac{(a+b)^2}{4} > a+b \Leftrightarrow (a+b)^2-4(a+b)>0 \Leftrightarrow (a+b)(a+b-4)>0$

$\Leftrightarrow a+b-4>0$ (vì $a+b>0$) $\Leftrightarrow a+b>4$.