II. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY.

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh đường thẳng AB song song với CD ta đi chứng minh $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ và điểm A không thuộc đường thẳng CD.
- Để chứng minh ba đường thẳng đồng quy ta có thể chứng minh theo hai hướng sau:

+ Chứng minh mỗi đường thẳng cùng đi qua một điểm cố định.

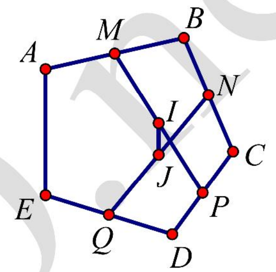
+ Chứng minh một đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường thẳng còn lại

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các đoạn MP và NQ.

Chứng minh rằng IJ song song với AE

Lời giải (hình 1.36)



Hình 1.36

Ta có $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{PN}$

$= \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD}\ \ + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

Suy ra IJ song song với AE

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC.Các điểm M, N, P thuộc các đường thẳng BC, CA, AB thỏa mãn $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, $\beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \gamma\overrightarrow{NC} + \alpha\overrightarrow{NA} = \alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} = \vec{0}$ thì AM, BN, CP đồng quy tại O, với O là điểm được xác định bởi $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} = \vec{0}$

Lời giải

Ta có $\beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \beta\ \ \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\ \ + \gamma\ \ \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}\ \ = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} +\ \ \beta + \gamma\ \ \overrightarrow{MO} = \alpha\overrightarrow{OA}$

$\Leftrightarrow\ \ \beta + \gamma\ \ \overrightarrow{MO} = \alpha\overrightarrow{OA}$

Suy ra M, O, A thẳng hàng hay AM đi qua điểm cố định O
Tương tự ta có BN, CP đi qua O
Vậy ba đường thẳng AM, BN, CP đồng quy

Ví dụ 3: Cho sáu điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Gọi Δ là một tam giác có ba đỉnh lấy trong sáu điểm đó và Δ' là tam giác có ba đỉnh còn lại. Chứng minh rằng với các cách chọn Δ khác nhau các đường thẳng nối trọng tâm hai tam giác Δ và Δ' đồng quy.

Định hướng. Giả sử sáu điểm đó là *A, B, C, D, E, F*.

Ta cần chứng minh tồn tại một điểm *H* cố định sao cho với các cách chọn Δ khác nhau thì *H* thuộc các đường thẳng nối trọng tâm hai tam giác Δ và Δ'. Nếu Δ là tam giác *ABC* thì Δ' là tam giác *DEF*. Gọi *G* và *G'* lần lượt là trọng tâm của tam giác *ABC* và tam giác *DEF*.

H thuộc đường thẳng GG' khi có số thực *k* sao cho $\overrightarrow{HG} = k\overrightarrow{HG'}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC})=\frac{k}{3}(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{HF})$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{HA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{HB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}-\frac{k}{3}\overrightarrow{HD}-\frac{k}{3}\overrightarrow{HE}-\frac{k}{3}\overrightarrow{HF}=\vec{0}$

Vì vai trò của các điểm A, B, C, D, E, F trong bài toán bình đẳng nên chọn k sao cho $-\frac{k}{3}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow k=-1$ khi đó $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{HF}=\vec{0}$

Lời giải

Gọi H là trọng tâm sáu điểm A, B, C, D, E, F khi đó

$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{HF}=\vec{0} \quad *$

Giả sử G, G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC, DEF suy ra

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}, \overrightarrow{G'D}+\overrightarrow{G'E}+\overrightarrow{G'F}=\vec{0}$

Suy ra

$* \Leftrightarrow 3\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{HG'}+\overrightarrow{G'D}+\overrightarrow{G'E}+\overrightarrow{G'F}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{HG}=\overrightarrow{HG'}$

Do đó GG' đi qua điểm cố định H do đó các đường thẳng nối trọng tâm hai tam giác Δ và Δ' đồng quy.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.111: Cho tứ giác $ABCD$, gọi K, L lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và tam giác BCD. Chứng minh rằng hai đường thẳng KL và AD song song với nhau

Bài 1.112: Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lần lượt lấy các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho $\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{B_1C}{B_1A}=\frac{C_1A}{C_1B}=k \;\; k>0$. Trên các cạnh B_1C_1, C_1AB_1, A_1B_1 lần lượt lấy các điểm A_2, B_2, C_2 sao cho $\frac{A_2B_1}{A_2C_1}=\frac{B_2C_1}{B_2A_1}=\frac{C_2A_1}{C_2B_1}=\frac{1}{k}$. Chứng minh rằng tam giác $A_2B_2C_2$ có các cạnh tương ứng song song với các cạnh của tam giác ABC.

Bài 1.113: Trên đường tròn cho năm điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Qua trọng tâm của ba trong năm điểm đó kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm còn lại. Chứng minh rằng mười đường thẳng nhận được cắt nhau tại một điểm.

Bài 1.114. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Kẻ MM', NN', PP', QQ' lần lượt vuông góc với CD, DA, AB, BC. Chứng tỏ rằng bốn đường thẳng MM', NN', PP', QQ' đồng quy tại một điểm. Nhận xét về điểm đồng quy và hai điểm I, O (I là giao điểm của MP và NQ).

Bài 1.115: Cho năm điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Gọi Δ là một tam giác có ba đỉnh lấy trong năm điểm đó, hai điểm còn lại xác định một đoạn thẳng θ. Chứng minh rằng với các cách chọn Δ khác nhau các đường thẳng nối trọng tâm tam giác Δ và trung điểm đoạn thẳng θ luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 1.116: Cho tam giác ABC. Ba đường thẳng x, y, z lần lượt đi qua A, B, C và chúng chia đôi chu vi tam giác ABC.
Chứng minh rằng x, y, z đồng quy .
Bài 1.117: Cho tam giác ABC, các đường tròn bàng tiếp góc A, B, C tương ứng tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại M, N, P.Chứng minh AM, BN, CP cùng đi qua một điểm, xác định điểm đó.
Bài 1.118 : Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA
a) Gọi G là giao điểm của MP và NQ. Chứng minh rằng $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$
b) Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng các đường thẳng $AA_1,\ BB_1,\ CC_1,\ DD_1$ đồng quy tại điểm G.
Bài 1.119: Cho tam giác ABC có trọng tâm G, M là một điểm tùy ý. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm đối xứng với M qua các trung điểm I, J, K của các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng
a) Các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại trung điểm O của mỗi đường
b) M, G, O thẳng hàng và $\dfrac{MO}{MG}=\dfrac{3}{2}$.
Bài 1.120: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với các cạnh BC, CA, AB. Gọi Δ_a là đường thẳng đi qua trung điểm PN và vuông góc với BC, Δ_b là đường thẳng đi qua trung điểm PM và vuông góc với AC, Δ_c là đường thẳng đi qua trung điểm MN và vuông góc với AB. Chứng minh rằng Δ_a, Δ_b và Δ_c đồng quy.
Bài 1.121: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ sắp xếp sao cho B' thuộc cạnh AB, D' thuộc cạnh AD. Chứng minh rằng các đường thẳng DB', CC', BD' đồng quy.