II. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM CỰC TRỊ BIỂU THỨC HÌNH HỌC.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng các bất đẳng thức

- Cho $\vec{a}, \vec{b}$ bất kì. Khi đó ta có

+ $\vec{a}.\vec{b} \le \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 1$ hay $\vec{a}; \vec{b}$ cùng hướng.

+ $\vec{a}.\vec{b} \ge -\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = -1$ hay $\vec{a}; \vec{b}$ ngược hướng.

- $\vec{u}^2 \ge 0$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u} = \vec{0}$
- Bất đẳng thức cổ điển (Cauchy, Bunhiacopxki...)

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M là một điểm bất kỳ. Chứng minh rằng
$MA^2 + MB^2 + MC^2 \ge MA.GA + MB.GB + MC.GC \ge GA^2 + GB^2 + GC^2$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MG} = MA.MG.\cos\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MG}\right) \le MA.MG$

Tương tự $MB.GB \ge \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GB};\ MC.GC \ge \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{GC}$

Suy ra $MA.GA + MB.GB + MC.GC \ge \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{GC}$

Mặt khác

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{GC} = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)\overrightarrow{GA} + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right).\overrightarrow{GB} + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right).\overrightarrow{GC}$

$= \overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + GA^2 + GB^2 + GC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2$

Suy ra $MA.GA + MB.GB + MC.GC \ge GA^2 + GB^2 + GC^2$ (*)

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$MA^2 + MB^2 + MC^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \ge 2MA.GA + 2MB.GB + 2MC.GC$

Kết hợp (*) suy ra

$MA^2 + MB^2 + MC^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \ge MA.GA + MB.GB + MC.GC + GA^2 + GB^2 + GC^2$ hay

$MA^2 + MB^2 + MC^2 \ge MA.GA + MB.GB + MC.GC$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét:

- Ta có $GA = \frac{2}{3}m_a,\ GB = \frac{2}{3}m_b,\ GC = \frac{2}{3}m_c$

$\Rightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{4}{9}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right) = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$

Suy ra với mọi điểm M thì

$m_a.MA + m_b.MB + m_c.MC \ge \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$

$3\left(MA^2 + MB^2 + MC^2\right) \ge a^2 + b^2 + c^2$

$3\left(MA^2 + MB^2 + MC^2\right) \ge 2\left(m_a.MA + m_b.MB + m_c.MC\right)$

Đặc biệt

- Với $M \equiv O$ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác, ta có

$OA^2 + OB^2 + OC^2 \ge OA.GA + OB.GB + OC.GC \ge GA^2 + GB^2 + GC^2$

Mặt khác ta có $OA = OB = OC = R$, ta có

$R\left(GA+GB+GC\right) \le 3R^2$ hay $m_a + m_b + m_c \le \frac{9}{2}R$ suy ra $\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c} \ge \frac{2}{R}$

$R\left(GA+GB+GC\right) \ge GA^2+GB^2+GC^2$ hay $\frac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{m_a+m_b+m_c} \le \frac{3R}{2}$

$3R^2 \ge GA^2+GB^2+GC^2$ hay $m_a^2+m_b^2+m_c^2 \le \frac{27}{4}R^2$, $9R^2 \ge a^2+b^2+c^2$

- Với $M \equiv I$ tâm đường tròn nội tiếp tam giác, ta có $IA.GA + IB.GB + IC.GC \ge GA^2+GB^2+GC^2$

Mặt khác $IA = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$, $IB = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}}$, $IC = \frac{r}{\sin\frac{C}{2}}$ do đó ta có

$$\frac{m_a}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{m_b}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{m_c}{\sin\frac{C}{2}} \ge \frac{a^2+b^2+c^2}{2r}$$

- Với $M \equiv H$ ta được $3\left(HA^2+HB^2+HC^2\right) \ge a^2+b^2+c^2$.

Xét tam giác ABC nhọn khi đó ta có

$$HC = \frac{CA'}{\sin CHA'} = \frac{CA'}{\sin B} = \frac{AC.\cos C}{\sin B} = 2R\cos C.$$

Tương tự ta cũng có: HB = 2RcosB, HC = 2RcosC

Do đó $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \ge \left(\frac{p}{3R}\right)^2$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC và điểm M bất kỳ. Chứng minh rằng

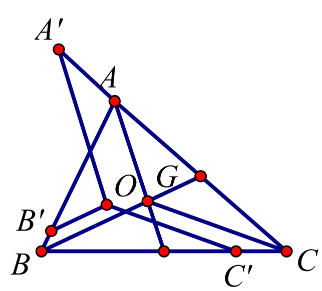
$$\cos\frac{A}{2}.MA + \cos\frac{B}{2}.MB + \cos\frac{C}{2}.MC \ge \frac{a+b+c}{2}$$

Lời giải (2.13)

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

Ta có $a.\overrightarrow{IA}+b.\overrightarrow{IB}+c.\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Rightarrow \frac{\cos\frac{A}{2}}{IA}\overrightarrow{IA}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{IB}\overrightarrow{IB}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{IC}\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Vì $\cos\frac{A}{2}.MA = \frac{\cos\frac{A}{2}}{IA}.MA.IA \ge \frac{\cos\frac{A}{2}}{IA}.\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{IA}$, tương tự ta có



Hình 2.13

$\cos\frac{B}{2}.MB \ge \frac{\cos\frac{B}{2}}{IB}.\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{IB}$ và

$\cos\frac{C}{2}.MC \ge \frac{\cos\frac{C}{2}}{IC}.\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{IC}$

Mà $\frac{\cos\frac{A}{2}}{IA}.\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{IA}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{IB}.\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{IB}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{IC}.\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{IC}$

$$= \overrightarrow{MI}\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{IA}\overrightarrow{IA} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{IB}\overrightarrow{IB} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{IC}\overrightarrow{IC} \right) + \cos\frac{A}{2}.IA + \cos\frac{B}{2}.IB + \cos\frac{C}{2}.IC$$

$$= \cos\frac{A}{2}.IA + \cos\frac{B}{2}.IB + \cos\frac{C}{2}.IC = AE + BF + CD = \frac{a+b+c}{2}$$

Do đó $\cos\frac{A}{2}.MA + \cos\frac{B}{2}.MB + \cos\frac{C}{2}.MC \ge \frac{a+b+c}{2}$

Tổng quát

Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ ($n \ge 3$) ngoại tiếp đường tròn tâm J. Chứng minh rằng với điểm M bất kỳ thì $\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{A_i}{2}.\left(MA_i - JA_i\right) \ge 0$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC với G là trọng tâm. Qua điểm O bất kỳ nằm trong tam giác kẻ đường thẳng song song với GA, GB, GC tương ứng cắt CA, AB, BC tại các điểm A', B', C'. Xác định vị trí điểm M để $m_aMA' + m_bMB' + m_cMC'$ đạt giá trị nhỏ nhất

Lời giải

Ta có $m_a.MA' = \frac{3}{2}GA.MA' \ge \frac{3}{2}\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{MA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{GA}.\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA'}\right)$

Tương tự $m_b.MB' \ge \frac{3}{2}\overrightarrow{GB}.\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB'}\right)$, $m_c.MC' \ge \frac{3}{2}\overrightarrow{GC}.\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC'}\right)$

Suy ra $m_a.MA' + m_b.MB' + m_c.MC' \ge \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{GA}\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{GB}\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{GC}\overrightarrow{OC'}\right)$

Hay $m_a.MA' + m_b.MB' + m_c.MC' \ge m_aOA' + m_bOB' + m_cOC'$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M trùng với O.

Vậy với M trùng với O thì $m_aMA' + m_bMB' + m_cMC'$ đạt giá trị chỏ nhất.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC và và ba số thực x, y, z.

Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 \ge 2yz\cos A + 2zx\cos B + 2xy\cos C$

Lời giải

Gọi $(I;r)$ là đường tròn nội tiếp Δ ABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P.

Khi đó $\left(x.\overrightarrow{IM} + y.\overrightarrow{IN} + z.\overrightarrow{IP}\right)^2 \ge 0$

$$\Leftrightarrow x^2.IM^2 + y^2.IN^2 + z^2.IP^2 + 2xy\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IN} + 2yz\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{IP} + 2zx\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IM} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + y^2 + z^2\right)r^2 + 2r^2\left[xy\cos\left(180^0 - C\right) + yz\cos\left(180^0 - A\right) + zx\cos\left(180^0 - B\right)\right] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \ge 2yz\cos A + 2zx\cos B + 2xy\cos C$$ đpcm.

Nhận xét:

+ Khi chọn $x = y = z = 1$ ta có: $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$.

+ Khi chọn $y = z = 1$ ta có $\cos A + x(\cos B + \cos C) \le 1 + \frac{1}{2}x^2$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 2.109: Cho tam giác ABC và ba số thực x, y, z. Chứng minh rằng:

$$yz\cos 2A + zx\cos 2B + xy\cos 2C \le -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Bài 2.110: Cho tam giác ABC không đều nội tiếp đường tròn (O). Tìm trên đường tròn điểm M để có tổng bình phương khoảng cách từ đó đến ba đỉnh tam giác là nhỏ nhất, lớn nhất.
Bài 2.111: Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi là góc α giữa hai trung tuyến BD và CK. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\cos\alpha$
Bài 2.112: Cho M là một điểm bất kì nằm trong mặt phẳng tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = \frac{MA}{a} + \frac{MB}{b} + \frac{MC}{c}$
Bài 2.113: Cho tam giác ABC ABC. Tìm điểm M sao cho biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất:
$T = 2.\cos\frac{A}{2}.MA + MB + MC$
Bài 2.114: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

a) $am_a^2 + bm_b^2 + cm_c^2 \ge \frac{9}{4}abc$

b) $am_bm_c + bm_cm_a + cm_am_b \ge \frac{9}{4}abc$

c) $\frac{m_a^2}{a} + \frac{m_b^2}{b} + \frac{m_c^2}{c} \ge \frac{9}{4}.\frac{a^3 + b^3 + c^3}{ab + bc + ca}$

Bài 2.115: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

a) $a^2 + b^2 + c^2 \le 9R^2$ b) $R \ge 2r$

c) $R^2 + a^2 + b^2 \ge c^2$ d) $4S \le (ab + bc + ca)\sqrt{\frac{abc}{a^3 + b^3 + c^3}}$

e) $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \le 8R(R - 2r)$

Bài 2.116: Cho tam giác ABC, O là điểm bất kỳ trong tam giác. Qua O kẻ đường thẳng song song với AB, BC, CA cắt BC, CA, AB tại A', B', C'. Chứng minh rằng với mọi điểm M ta có $cMA' + aMB' + bMC' \ge cOA' + aOB' + bOC'$
Bài 2.117: Cho tam giác ABC nhọn. Tìm điểm M sao cho $MA + 2MB + \sqrt{3}MC$ đạt giá trị nhỏ nhất.
Bài 2.118: Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ ($n \ge 3$), $\vec{e_i}$, $i = \overline{1,n}$, O là điểm bất kỳ nằm trong đa giác.Gọi B_i là hình chiếu điểm O lên A_iA_{i+1}. Chứng minh rằng với mọi điểm M ta có
$\sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1}(MB_i - OB_i) \ge 0$
Bài 2.119: Cho đa giác đều $A_1A_2...A_n$. Tìm điểm M sao cho tổng $MA_1 + MA_2 + ... + MA_n$ nhỏ nhất.
Bài 2.120: Cho tam giác ABC; O là điểm trong tam giác, đặt
$\widehat{BOC} = \alpha, \widehat{COA} = \beta, \widehat{AOB} = \gamma$. Chứng minh rằng với mọi điểm M ta có

$MA\sin\alpha + MB\sin\beta + MC\sin\gamma \geq OA\sin\alpha + OB\sin\beta + OC\sin\gamma$

Bài 2.121: Cho tam giác ABC, tìm vị trí điểm M để $P = a.MA^2 + b.MB^2 + c.MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.Biết:

a) M là điểm bất kì

a) M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

c) M nằm trên đường thẳng d bất kỳ

Bài 2.122: Cho n điểm $A_1A_2...A_n$, và n số dương $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ .O là điểm thoả mãn $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$. Chứng minh rằng với mọi điểm M ta có bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.MA_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i.MA_i \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i^2$$

Bài 2.123: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Xác định điểm M sao cho biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất.

a) $\sqrt{2}MA + MB + MC$ b) $2\sqrt{2}MA + \sqrt{10}\left(MB + MC\right)$

Bài 2.124: Chứng minh rằng trong tam giác nhọn ABC ta luôn có

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq 6\cos A.\cos B.\cos C$$

Bài 2.125: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

a) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$ b) $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

c) $\sin A.\sin B.\sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$ d) $\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \leq \frac{9}{4}$

e) $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ f) $\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$