

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

☞ **DẠNG 1: Xác định độ dài tổng, hiệu của các vectơ.**

1. Phương pháp giải.

Để xác định độ dài tổng hiệu của các vectơ

- Trước tiên sử dụng định nghĩa về tổng, hiệu hai vectơ và các tính chất, quy tắc để xác định phép toán vectơ đó.
- Dựa vào tính chất của hình, sử dụng định lý Pitago, hệ thức lượng trong tam giác vuông để xác định độ dài vectơ đó.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có $\angle ABC = 30^\circ$ và $BC = a\sqrt{5}$.

Tính độ dài của các vectơ $\vec{AB} + \vec{BC}$, $\vec{AC} - \vec{BC}$ và $\vec{AB} + \vec{AC}$.

Lời giải (hình 1.10)

Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\bullet \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

$$\text{Mà } \sin \angle ABC = \frac{AC}{BC}$$

$$\Rightarrow AC = BC \cdot \sin \angle ABC = a\sqrt{5} \cdot \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Do đó } |\vec{AB} + \vec{BC}| = |\vec{AC}| = AC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\bullet \vec{AC} - \vec{BC} = \vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}$$

Ta có

$$AC^2 + AB^2 = BC^2 \Rightarrow AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{5a^2 - \frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{Vì vậy } |\vec{AC} - \vec{BC}| = |\vec{AB}| = AB = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

- Gọi D là điểm sao cho tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.

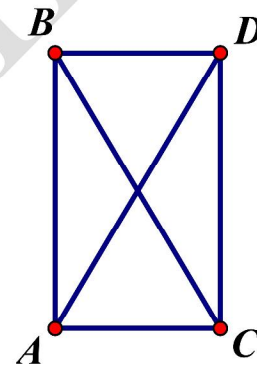
Khi đó theo quy tắc hình bình hành ta có $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$

Vì tam giác ABC vuông ở A nên tứ giác $ABDC$ là hình chữ nhật suy ra

$$AD = BC = a\sqrt{5}$$

$$\text{Vậy } |\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AD}| = AD = a\sqrt{5}$$

Ví dụ 2: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O và cạnh a . M là một điểm bất kỳ.



Hình 1.10

a) Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|, |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}|, |\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}|$

b) Chứng minh rằng $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vị trí điểm M . Tính độ dài vectơ \vec{u}

Lời giải (hình 1.11)

a) + Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Suy ra $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC$.

Áp dụng định lý Pitago ta có

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}a$$

Vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = a\sqrt{2}$

+ Vì O là tâm của hình vuông nên $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$ suy ra

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}$$

Vậy $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{BC}| = a$

+ Do $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ suy ra

$$\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$$

Mà $|\overrightarrow{BD}| = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$ suy ra

$$|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}| = a\sqrt{2}$$

b) Theo quy tắc phép trừ ta có

$$\vec{u} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB}$$

Suy ra \vec{u} không phụ thuộc vị trí điểm M .

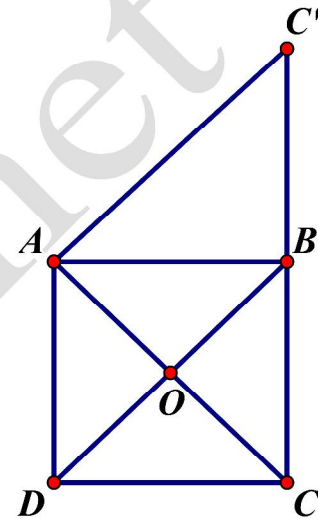
Qua A kẻ đường thẳng song song với DB cắt BC tại C' .

Khi đó tứ giác $ADBC'$ là hình bình hành (vì có cặp cạnh đối song song)

suy ra $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC'}$

Do đó $\vec{u} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{CC'}$

Vì vậy $|\vec{u}| = |\overrightarrow{CC'}| = BC + BC' = a + a = 2a$



Hình 1.11

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.14: Cho tam giác ABC đều cạnh a . Tính độ dài của các vectơ sau

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

Bài 1.15: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O và cạnh a . M là một điểm bất kỳ.

a) Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}|, |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}|$

b) Tính độ dài vector $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

Bài 1.16: Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\angle BCD = 60^\circ$. Gọi O là tâm hình thoi.

Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|, |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DC}|$.

Bài 1.17: Cho bốn điểm A, B, C, O phân biệt có độ dài ba vector $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ cùng bằng a và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

a) Tính các góc $\angle AOB, \angle BOC, \angle COA$

b) Tính $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{OA}|$

Bài 1.18: Cho góc Oxy . Trên Ox, Oy lấy hai điểm A, B . Tìm điều kiện của A, B sao cho $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ nằm trên phân giác của góc Oxy .