B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG 1 : ***Xác định biểu thức tích vô hướng, góc giữa hai vectơ.***

1. Phương pháp giải.

- Dựa vào định nghĩa $\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)$
- Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ

2. Các ví dụ:

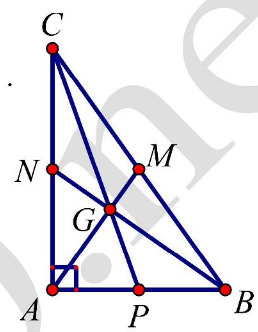
Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a,\ BC = 2a$ và G là trọng tâm.

a) Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$

b) Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$

c) Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}$

Lời giải (hình 2.2)



Hình 2.2

a) * Theo định nghĩa tích vô hướng ta có

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = 2a^2\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$.

Mặt khác $\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = \cos ABC = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$

Nên $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = a^2$

* Ta có $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = -\left|\overrightarrow{CB}\right|.\left|\overrightarrow{CA}\right|\cos ACB$

Theo định lý Pitago ta có $CA = \sqrt{\left(2a\right)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

Suy ra $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = -a\sqrt{3}.2a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = -3a^2$

b) Cách 1: Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = 0$ và từ câu a ta có

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -a^2$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = -3a^2$. Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = -4a^2$

Cách 2: Từ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ và hằng đẳng thức

$\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right)^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}\right)$ Ta có

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = -\dfrac{1}{2}\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right) = -4a^2$

c) Tương tự cách 2 của câu b) vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ nên

$\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} = -\dfrac{1}{2}\left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right)$

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB

Dễ thấy tam giác ABM đều nên $GA^2 = \left(\dfrac{2}{3}AM\right)^2 = \dfrac{4a^2}{9}$

Theo định lý Pitago ta có:

$GB^2 = \dfrac{4}{9}BN^2 = \dfrac{4}{9}\left(AB^2 + AN^2\right) = \dfrac{4}{9}\left(a^2 + \dfrac{3a^2}{4}\right) = \dfrac{7a^2}{9}$

$GC^2 = \dfrac{4}{9}CP^2 = \dfrac{4}{9}\left(AC^2 + AP^2\right) = \dfrac{4}{9}\left(3a^2 + \dfrac{a^2}{4}\right) = \dfrac{13a^2}{9}$

Suy ra $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}=-\frac{1}{2}\left(\frac{4a^2}{9}+\frac{7a^2}{9}+\frac{13a^2}{9}\right)=-\frac{4a^2}{3}$

Ví dụ 2: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ADM . Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})$ b) $\overrightarrow{CG}.\ \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DM}$

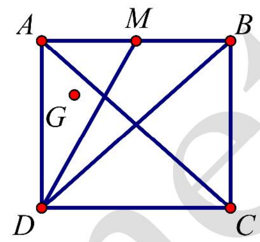
Lời giải (hình 2.3)

a) Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

Do đó $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\left|\overrightarrow{CA}\right|.\left|\overrightarrow{CB}\right|\cos ACB$

($\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0$ vì $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$)



Hình 2.3

Mặt khác $ACB=45^0$ và theo định lý Pitago ta có :

$AC=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$

Suy ra $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})=a.a\sqrt{2}\cos 45^0=a^2$

b) Vì G là trọng tâm tam giác ADM nên $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CM}$

Mặt khác theo quy tắc hình bình hành và hệ thức trung điểm ta có $\overrightarrow{CA}=-\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ và

$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\ \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\ =\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{CB}-\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\ \right]=-\frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$

Suy ra $\overrightarrow{CG}=-\overrightarrow{AB}-\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\ -\frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\ =-\left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\right)$

Ta lại có $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DM}=-\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\ +\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}=-\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\right)$

Nên $\overrightarrow{CG}.\ \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DM}\ =\left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\right)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\right)$

$=\frac{5}{4}AB^2+4AD^2=\frac{21a^2}{4}$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có $BC=a,\ CA=b,\ AB=c$. M là trung điểm của BC, D là chân đường phân giác trong góc A.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, rồi suy ra $\cos A$.

b) Tính $\overrightarrow{AM}^2$ và $\overrightarrow{AD}^2$

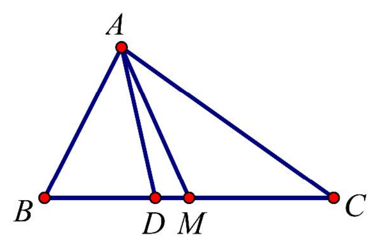
Lời giải (hình 2.3)

a) Ta có

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-\ \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\ ^2\right]$

$=\frac{1}{2}\left[AB^2+AC^2-CB^2\right]=\frac{1}{2}\ c^2+b^2-a^2$

Mặt khác $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC\cos A=cb\cos A$



Hình 2.3

Suy ra $\frac{1}{2}\left(c^2+b^2-a^2\right)=cb\cos A$ hay $\cos A=\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}$

b) * Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

Suy ra $\left(\overrightarrow{AM}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2\right)$

Theo câu a) ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(c^2+b^2-a^2\right)$ nên

$\left(\overrightarrow{AM}\right)^2=\frac{1}{4}\left(c^2+2.\frac{1}{2}\left(c^2+b^2-a^2\right)+b^2\right)=\frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$

* Theo tính chất đường phân giác thì $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$

Suy ra $\overrightarrow{BD}=\frac{BD}{DC}\overrightarrow{DC}=\frac{b}{c}\overrightarrow{DC}$ (*)

Mặt khác $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$ thay vào (*) ta được

$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\frac{b}{c}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)\Leftrightarrow\left(b+c\right)\overrightarrow{AD}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow\left(b+c\right)^2\overrightarrow{AD}^2=\left(b\overrightarrow{AB}\right)^2+2bc\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}+\left(c\overrightarrow{AC}\right)^2$

$\Leftrightarrow\left(b+c\right)^2\overrightarrow{AD}^2=b^2c^2+2bc.\frac{1}{2}\left(c^2+b^2-a^2\right)+c^2b^2$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}^2=\frac{bc}{\left(b+c\right)^2}\left(b+c-a\right)\left(b+c+a\right)$

Hay $\overrightarrow{AD}^2=\frac{4bc}{\left(b+c\right)^2}p\left(p-a\right)$

Nhận xét : Từ câu b) suy ra độ dài đường phân giác kẻ từ đỉnh A là $l_a=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p\left(p-a\right)}$

3. Bài tập luyện tập:

Bài 2.13. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a. Tính các tích vô hướng:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

Bài 2.14 .Cho tam giác ABC có $AB=5,\ BC=7,\ AC=8$.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, rồi suy ra giá trị của góc A.

b) Tính $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$.

c) Gọi D là điểm trên CA sao cho $CD=3$. Tính $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}$.

Bài 2.15. Cho các véctơ $\vec{a},\vec{b}$ có độ dài bằng 1 và thoả mãn điều kiện $\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|=\sqrt{7}$. Tính $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Bài 2.16. Cho các véctơ $\vec{a},\vec{b}$ có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai véc tơ bằng 60^0. Xác định cosin góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ với $\vec{u}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}$

Bài 2.17. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 3. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM=1$, trên cạnh CD lấy điểm N sao cho $DN=1$ và P là trung điểm BC. Tính $\cos MNP$.

Bài 2.18. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2$. M là điểm được xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$, G là trọng tâm tam giác ADM. Tính $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GC}$

Bài 2.19. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DA, BC. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD biết $AB = CD = 2a,\ MN = a\sqrt{3}$.

Bài 2.20: Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = BC = 2\sqrt{5},\ CD = BD = 5\sqrt{2}, BD = 3\sqrt{10},\ AC = 10$. Tìm góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}$.

Bài 2.21: Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng 1. Gọi D là điểm đối xứng với C qua đường thẳng AB, M là trung điểm của cạnh CB.

a) Xác định trên đường thẳng AC điểm N sao cho tam giác MDN vuông tại D. Tính diện tích tam giác đó.

b) Xác định trên đường thẳng AC điểm P sao cho tam giác MPD vuông tại M. Tính diện tích tam giác đó.

c) Tính côsin góc hợp bởi hai đường thẳng MP và PD