## B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

### DẠNG 1: Dựng và tính độ dài vectơ chứa tích một vectơ với một số.

**1. Phương pháp giải.**

Sử dụng định nghĩa tích của một vectơ với một số và các quy tắc về phép toán vectơ để dựng vectơ chứa tích một vectơ với một số, kết hợp với các định lí pitago và hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính độ dài của chúng.

**2. Các ví dụ.**

***Ví dụ 1:*** Cho tam giác đều $ABC$ cạnh $a$. điểm $M$ là trung điểm $BC$. Dựng các vectơ sau và tính độ dài của chúng.

a) $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MA}$

b) $\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

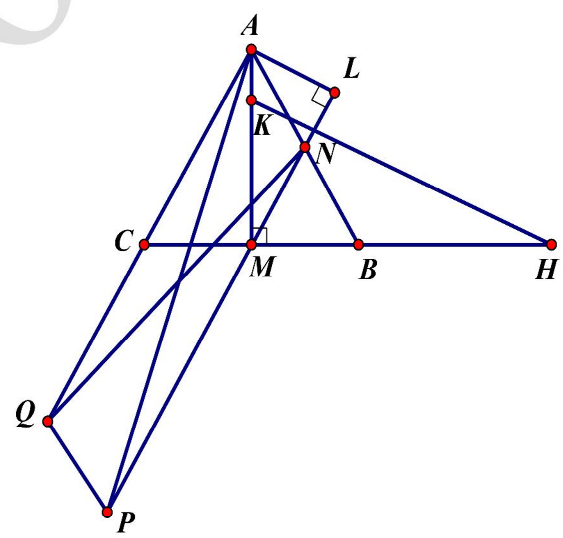
c) $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA}-2,5\overrightarrow{MB}$

***Lời giải*** (Hình 1.14)

a) Do $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CM}$ suy ra theo quy tắc ba điểm ta có

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CA}$$

Vậy $\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MA}\right|=CA=a$



Hình 1.14

b) Vì $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}$ nên theo quy tắc trừ ta có $\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MA}$

Theo định lí Pitago ta có

$$MA=\sqrt{AB^2-BM^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Vậy $\left|\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right|=MA=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) Gọi $N$ là trung điểm $AB$, $Q$ là điểm đối xứng của $A$ qua $C$ và $P$ là đỉnh của hình bình hành $AQPN$.

Khi đó ta có $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AN},\ 2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AQ}$ suy ra theo quy tắc hình bình hành ta có $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AP}$

Gọi $L$ là hình chiếu của $A$ lên $QN$

Vì $MN//AC\Rightarrow ANL=MNB=CAB=60^0$

Xét tam giác vuông $ANL$ ta có

$$\sin ANL=\frac{AL}{AN}\Rightarrow AL=AN.\sin ANL=\frac{a}{2}\sin 60^0=\frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos ANL=\frac{NL}{AN}\Rightarrow NL=AN.\cos ANL=\frac{a}{2}\cos 60^0=\frac{a}{4}$$

Ta lại có $AQ=PN\Rightarrow PL=PN+NL=AQ+NL=2a+\frac{a}{4}=\frac{9a}{4}$

Áp dụng định lí Pitago trong tam giác $ALP$ ta có

$$AP^2=AL^2+PL^2=\frac{3a^2}{16}+\frac{81a^2}{16}=\frac{21a^2}{4}\Rightarrow AP=\frac{a\sqrt{21}}{2}$$

Vậy $\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right|=AP=\frac{a\sqrt{21}}{2}$

d) Gọi $K$ là điểm nằm trên đoạn $AM$ sao cho $MK=\frac{3}{4}MA$, $H$ thuộc tia $MB$ sao cho $MH=2,5MB$.

Khi đó $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MK},\ 2,5\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MH}$

Do đó $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA}-2,5\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{HK}$

Ta có $MK=\frac{3}{4}AM=\frac{3}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}a}{8}$, $MH=2,5MB=2,5.\frac{a}{2}=\frac{5a}{4}$

Áp dụng định lí Pitago cho tam tam giác vuông $KMH$ ta có

$$KH=\sqrt{MH^2+MK^2}=\sqrt{\frac{25a^2}{16}+\frac{27a^2}{64}}=\frac{a\sqrt{127}}{8}$$

Vậy $\left|\frac{3}{4}\overrightarrow{MA}-2,5\overrightarrow{MB}\right|=KH=\frac{a\sqrt{127}}{8}$

***Ví dụ 2:*** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$.

a) Chứng minh rằng $\vec{u} = 4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

b) Tính độ dài vectơ $\vec{u}$

***Lời giải*** (Hình 1.15)

a) Gọi $O$ là tâm hình vuông.

Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\vec{u} = 4\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right) - 3\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}\right) - 2\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}\right)$$

$$= 4\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OD}$$

Mà $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$ nên $\vec{u} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$

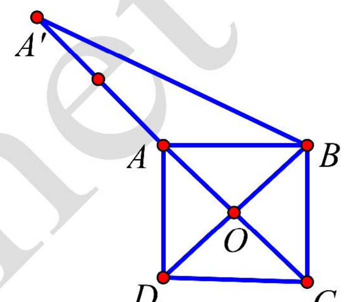
Suy ra $\vec{u}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M

b) Lấy điểm $A'$ trên tia $OA$ sao cho $OA' = 3OA$ khi đó $\overrightarrow{OA'} = 3\overrightarrow{OA}$ do đó $\vec{u} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA'}$

Mặt khác

$$BA' = \sqrt{OB^2 + OA'^2} = \sqrt{OB^2 + 9OA^2} = a\sqrt{5}$$

Suy ra $\left|\vec{u}\right| = a\sqrt{5}$



Hình 1.15

**3. Bài tập luyện tập.**

**Bài 1.26.** Cho tam giác đều $ABC$ cạnh $a$. Gọi điểm $M$, $N$ lần lượt là trung điểm $BC, CA$. Dựng các vectơ sau và tính độ dài của chúng.

a) $\overrightarrow{AN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{MN}$

c) $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

c) $0,25\overrightarrow{MA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{MB}$

**Bài 1.27:** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$.

a) Chứng minh rằng $\vec{u} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

b) Tính độ dài vectơ $\vec{u}$

### DẠNG 2: Chứng minh đẳng thức vectơ.

**1. Phương pháp giải.**

*Sử dụng các kiến thức sau để biến đổi vế này thành vế kia hoặc cả hai biểu thức ở hai vế cùng bằng biểu thức thứ ba hoặc biến đổi tương đương về đẳng thức đúng*:

- Các tính chất phép toán vectơ
- Các quy tắc: quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành và quy tắc phép trừ
- Tính chất trung điểm:

M là trung điểm đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

M là trung điểm đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$ (Với O là điểm tuỳ ý)

- Tính chất trọng tâm:

G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OG}$ (Với O là điểm tuỳ ý)

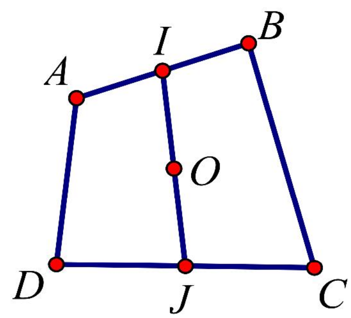
**2. Các ví dụ.**

***Ví dụ 1:*** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, O là trung điểm của IJ .Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$ với M là điểm bất kì



Hình 1.16

***Lời giải*** (Hình 1.16)

a) Theo quy tắc ba điểm ta có

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}$

Tương tự $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}$

Mà I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD nên

$\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}=\vec{0}, \overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=\vec{0}$

Vậy $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\ \overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}\ +\ \overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}\ +2\overrightarrow{IJ}=2\overrightarrow{IJ}$ đpcm

b) Theo hệ thức trung điểm ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OJ}$

Mặt khác O là trung điểm IJ nên $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\vec{0}$

Suy ra $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\ \overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}\ =\vec{0}$ đpcm

c) Theo câu b ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ do đó với mọi điểm M thì

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\ \ \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}\ +\ \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}\ +\ \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}\ +\ \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}\ =\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$ đpcm

***Ví dụ 2:*** Cho hai tam giác $ABC$ và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm G. Gọi $G_1, G_2, G_3$ lần lượt là trọng tâm tam giác $BCA_1, ABC_1, ACB_1$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{GG_2}+\overrightarrow{GG_3}=\vec{0}$

***Lời giải***

Vì $G_1$ là trọng tâm tam giác $BCA_1$ nên $3\overrightarrow{GG_1}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GA_1}$

Tương tự $G_2, G_3$ lần lượt là trọng tâm tam giác $ABC_1, ACB_1$ suy ra

$3\overrightarrow{GG_2}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC_1}$ và $3\overrightarrow{GG_3}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GB_1}$

Công theo vế với vế các đẳng thức trên ta có

$\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{GG_2}+\overrightarrow{GG_3}=2\ \ \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\ \ +\ \ \overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GB_1}+\overrightarrow{GC_1}$

Mặt khác hai tam giác $ABC$ và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm G nên

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GB_1}+\overrightarrow{GC_1}$

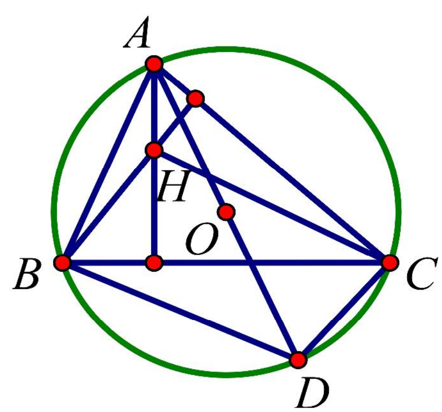
Suy ra $\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{GG_2}+\overrightarrow{GG_3}=\vec{0}$

***Ví dụ 3:*** Cho tam giác $ABC$ có trực tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$

c) $\overrightarrow{GH}+2\overrightarrow{GO}=\vec{0}$



Hình 1.17

***Lời giải*** (Hình 1.17)

a) Dễ thấy $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$ nếu tam giác $ABC$ vuông

Nếu tam giác $ABC$ không vuông gọi D là điểm đối xứng của A qua O khi đó

$BH//DC$ (vì cùng vuông góc với AC)

$BD//CH$ (vì cùng vuông góc với AB)

Suy ra $BDCH$ là hình bình hành, do đó theo quy tắc hình bình hành thì $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$ (1)

Mặt khác vì O là trung điểm của AD nên $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=2\overrightarrow{HO}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$

b) Theo câu a) ta có

$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OC}\right)=2\overrightarrow{HO}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$ đpcm

c) Vì G là trọng tâm tam giác $ABC$ nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$

Mặt khác theo câu b) ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$

Suy ra $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GH}\right)-3\overrightarrow{OG}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{GH}+2\overrightarrow{GO}=\vec{0}$

***Ví dụ 4:*** Cho tam giác $ABC$ với $AB=c,\ BC=a,\ CA=b$ và có trọng tâm G. Gọi $D,E,F$ lần lượt là hình chiếu G lên cạnh $BC,CA,AB$.

Chứng minh rằng $a^2.\overrightarrow{GD}+b^2.\overrightarrow{GE}+c^2.\overrightarrow{GF}=\vec{0}$

***Lời giải*** (hình 1.18)

Trên tia GD, GE, MF lần lượt lấy các điểm N, P, Q sao cho $GN=a,\ GP=b,\ GQ=c$ và dựng hình bình hành $GPRN$

Ta có $a^2.\overrightarrow{GD}+b^2.\overrightarrow{GE}+c^2.\overrightarrow{GF}=\vec{0}$

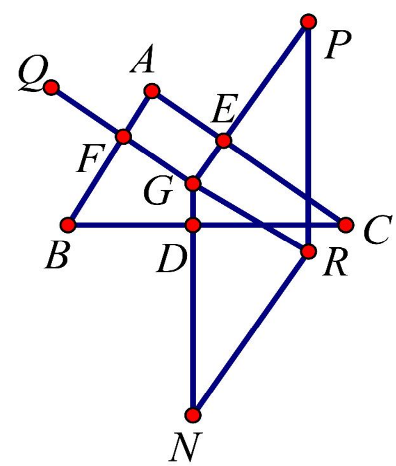
$\Leftrightarrow a.GD.\overrightarrow{GN}+b.GE.\overrightarrow{GP}+c.GF.\overrightarrow{GQ}=\vec{0}$ (*)

Ta có $a.GD=2S_{\Delta GBC}$, $b.GE=2S_{\Delta GCA}$, $c.GF=2S_{\Delta GAB}$,

mặt khác $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$ nên

$S_{\Delta GBC}=S_{\Delta GCA}=S_{\Delta GAB}$ suy ra $a.GD=b.GE=c.GF$

Vậy (*) $\Leftrightarrow \overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GQ}=\vec{0}$



Hình 1.18

Ta có $AC=GP=b,\ PR=BC=a$ và $\widehat{ACB}=\widehat{GPR}$

(góc có cặp cạnh vuông góc với nhau)

Suy ra $\Delta ACB=\Delta GPR\ (c.g.c)$

$\Rightarrow GR=AB=c$ và $\widehat{PGR}=\widehat{BAC}$

Ta có $\widehat{QGP}+\widehat{BAC}=180^0\Rightarrow \widehat{QGP}+\widehat{GPR}=180^0\Rightarrow Q,G,R$ thẳng hàng do đó $G$ là trung điểm của $QR$

Theo quy tắc hình bình hành và hệ thức trung điểm ta có

$\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GQ}=\overrightarrow{GR}+\overrightarrow{GQ}=\vec{0}$

Vậy $a^2.\overrightarrow{GD}+b^2.\overrightarrow{GE}+c^2.\overrightarrow{GF}=\vec{0}$.

***Ví dụ 5:*** Cho tam giác $ABC$ với các cạnh $AB = c,\ BC = a,\ CA = b$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng
$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

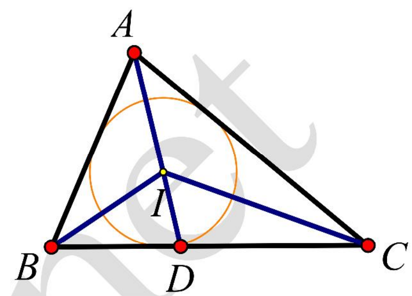
***Lời giải***

*Cách 1:* (Hình 1.19)Gọi D là chân đường phân giác góc A
Do D là đường phân giác giác trong góc A nên ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \frac{c}{b}\overrightarrow{DC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IB} = \frac{c}{b}\ \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{ID}$$

$$\Leftrightarrow\ \ b + c\ \ \overrightarrow{ID} = b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC}\ (1)$$



Hình 1.19

Do I là chân đường phân giác nên ta có :

$$\frac{ID}{IA} = \frac{BD}{BA} = \frac{CD}{CA} = \frac{BD + CD}{BA + CA} = \frac{a}{b + c}$$

$$\Rightarrow\ \ b + c\ \ \overrightarrow{ID} = -a\overrightarrow{IA}\ \ (2)$$

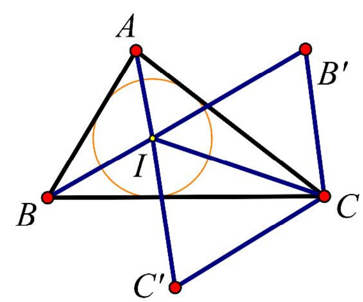
Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh

*Cách 2*: (hình 1.20)Qua C dựng đường thẳng song song với AI cắt BI tại B';song song với BI cắt AI tại A'

Ta có $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'}$ (*)

Theo định lý Talet và tính chất đường phân giác trong ta có :

$$\frac{IB}{IB'} = \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{c}{b} \Rightarrow \overrightarrow{IB'} = -\frac{b}{c}\overrightarrow{IB}\ \ (1)$$



Hình 1.20

Tương tự : $\overrightarrow{IA'} = -\frac{a}{c}\overrightarrow{IA}$ (2)

Từ (1) và (2) thay vào (*) ta có :

$$\overrightarrow{IC} = -\frac{a}{c}\overrightarrow{IA} - \frac{b}{c}\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

**3. Bài tập luyện tập.**

**Bài 1.28:** Cho tam giác $ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $BC, CA, AB$. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ với O là điểm bất kỳ.

**Bài 1.29**: Cho tam giác ABC .Gọi H là điểm đối xứng với B qua G với G là trọng tâm tam giác. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$ với M là trung điểm của BC

**Bài 1.30:** Cho tam giác $ABC$ có điểm M thuộc cạnh BC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC}\overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC}\overrightarrow{AC}$

**Bài 1.31:** Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A. Chứng minh rằng $\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} = \vec{0}$

**Bài 1.32:** Cho tam giác $ABC$ đều tâm O. M là điểm tùy ý trong tam giác. Hạ MD, ME, MF tương ứng vuông góc với BC, CA, AB. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$

**Bài 1.33:** Trong mặt phẳng cho tam giác ABC. Một đường thẳng $\Delta$ là đường thẳng bất kỳ. Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC$ và A', B', C', G' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C, G lên đường thẳng $\Delta$.

Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$

**Bài 1.34:** Cho $n$ vectơ đôi một khác phương và tổng của $n-1$ vectơ bất kì trong n vectơ trên cùng phương với vectơ còn lại. Chứng minh rằng tổng $n$ vectơ cho ở trên bằng vectơ không.

**Bài 1.35:** Cho tam giác $ABC$ với các cạnh $AB = c, BC = a, CA = b$.

Gọi I là tâm và D, E, F lần lượt là tiếp điểm của cạnh BC, CA, AB của đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$. M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

a) $\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)\overrightarrow{IA} + \left(\cot\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2}\right)\overrightarrow{IB} + \left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}\right)\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

b) $\cot\frac{A}{2}\overrightarrow{IM} + \cot\frac{B}{2}\overrightarrow{IN} + \cot\frac{C}{2}\overrightarrow{IP} = \vec{0}$

c) $b + c - a\ \overrightarrow{IM} + \ a + c - b\ \overrightarrow{IN} + \ a + b - c\ \overrightarrow{IP} = \vec{0}$

d) $a\overrightarrow{AD} + b\overrightarrow{BE} + c\overrightarrow{CF} = \vec{0}$

**Bài 1.36:** Cho tam giác $ABC$. M là điểm bất kỳ nằm trong tam giác.

Chứng minh rằng : $S_{MBC}\overrightarrow{MA} + S_{MCA}.\overrightarrow{MB} + S_{MAB}\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

**Bài 1.37**: Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ ($n \geq 3$); $\vec{e_i}, 1 \leq i \leq n$ là vectơ đơn vị vuông góc với $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ (xem $A_{n+1} \equiv A_1$) và hướng ra phía ngoài đa giác.

Chứng minh rằng

$A_1A_2\overrightarrow{e_1} + A_2A_3\overrightarrow{e_2} + ... + A_nA_1\overrightarrow{e_n} = \vec{0}$ (*định lý con nhím*)

**Bài 1.38**: Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ ($n \geq 3$) với I là tâm đường tròn tiếp xúc các cạnh của đa giác; gọi $\overrightarrow{e_i}, 1 \leq i \leq n$ là véc tơ đơn vị cùng hướng với véc tơ $\overrightarrow{IA_i}$. Chứng minh rằng $\cos\frac{A_1}{2}\overrightarrow{e_1} + \cos\frac{A_2}{2}\overrightarrow{e_2} + ... + \cos\frac{A_n}{2}\overrightarrow{e_n} = \vec{0}$

**Bài 1.39:** Cho tam giác $ABC$ vuông tại A. I là trung điểm của đường cao AH. Chứng minh rằng : $a^2\overrightarrow{IA} + b^2\overrightarrow{IB} + c^2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.