

+ Nếu $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ thì hai đường thẳng trùng nhau.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

✎ **DẠNG 1: Viết phương trình tổng quát của đường thẳng.**

1. Phương pháp giải:

• Để viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ ta cần xác định

- Điểm $A(x_0; y_0) \in \Delta$

- Một vectơ pháp tuyến $\vec{n} \ a; b$ của Δ

Khi đó phương trình tổng quát của Δ là $a x - x_0 + b y - y_0 = 0$

Chú ý:

○ Đường thẳng Δ có phương trình tổng quát là $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$ nhận

$\vec{n} \ a; b$ làm vectơ pháp tuyến.

○ Nếu hai đường thẳng song song với nhau thì VTPT đường thẳng này cũng là VTPT của đường thẳng kia.

○ Phương trình đường thẳng Δ qua điểm $M \ x_0; y_0$ có dạng

$\Delta : a x - x_0 + b y - y_0 = 0$ với $a^2 + b^2 \neq 0$

hoặc ta chia làm hai trường hợp

+ $x = x_0$: nếu đường thẳng song song với trục Oy

+ $y - y_0 = k x - x_0$: nếu đường thẳng cắt trục Oy

○ Phương trình đường thẳng đi qua $A \ a; 0$, $B \ 0; b$ với $ab \neq 0$ có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC biết $A \ 2; 0$, $B \ 0; 4$, $C(1; 3)$. Viết phương trình tổng quát của

a) Đường cao AH

b) Đường trung trực của đoạn thẳng BC .

c) Đường thẳng AB .

d) Đường thẳng qua C và song song với đường thẳng AB .

Lời giải

a) Vì $AH \perp BC$ nên \vec{BC} là vectơ pháp tuyến của AH

Ta có $\vec{BC} \ 1; -1$ suy ra đường cao AH đi qua A và nhận \vec{BC} là vectơ pháp tuyến có phương trình tổng quát là $1 \cdot x - 2 - 1 \cdot y - 0 = 0$ hay $x - y - 2 = 0$.

b) Đường trung trực của đoạn thẳng BC đi qua trung điểm BC và nhận vectơ \vec{BC} làm vectơ pháp tuyến.

Gọi I là trung điểm BC khi đó $x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1}{2}$, $y_I = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow I \left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2} \right)$

Suy ra phương trình tổng quát của đường trung trực BC là $1 \cdot \left(x - \frac{1}{2} \right) - 1 \cdot \left(y - \frac{7}{2} \right) = 0$ hay

$x - y + 3 = 0$

c) Phương trình tổng quát của đường thẳng AB có dạng $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ hay $2x + y - 4 = 0$.

d) Cách 1: Đường thẳng AB có VTPT là $\vec{n} = 2; 1$ do đó vì đường thẳng cần tìm song song với đường thẳng AB nên nhận $\vec{n} = 2; 1$ làm VTPT do đó có phương trình tổng quát là $2x + y - 5 = 0$.

Cách 2: Đường thẳng Δ song song với đường thẳng AB có dạng $2x + y + c = 0$.

Điểm C thuộc Δ suy ra $2 \cdot 1 + 3 + c = 0 \Rightarrow c = -5$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình tổng quát là $2x + y - 5 = 0$.

Ví dụ 2: Cho đường thẳng $d : x - 2y + 3 = 0$ và điểm $M(-1; 2)$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ biết:

- Δ đi qua điểm M và có hệ số góc $k = 3$
- Δ đi qua M và vuông góc với đường thẳng d
- Δ đối xứng với đường thẳng d qua M

Lời giải:

a) Đường thẳng Δ có hệ số góc $k = 3$ có phương trình dạng $y = 3x + m$. Mặt khác $M \in \Delta \Rightarrow 2 = 3 \cdot (-1) + m \Rightarrow m = 5$

Suy ra phương trình tổng quát đường thẳng Δ là $y = 3x + 5$ hay $3x - y + 5 = 0$.

b) Ta có $x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ do đó hệ số góc của đường thẳng d là $k_d = \frac{1}{2}$.

Vì $\Delta \perp d$ nên hệ số góc của Δ là k_Δ thì $k_d \cdot k_\Delta = -1 \Rightarrow k_\Delta = -2$

Do đó $\Delta : y = -2x + m, M \in \Delta \Rightarrow 2 = -2 \cdot (-1) + m \Rightarrow m = -2$

Suy ra phương trình tổng quát đường thẳng Δ là $y = -2x - 2$ hay $2x + y + 2 = 0$.

c) Cách 1: Ta có $-1 - 2 \cdot 2 + 3 \neq 0$ do đó $M \notin d$ vì vậy đường thẳng Δ đối xứng với đường thẳng d qua M sẽ song song với đường thẳng d suy ra đường thẳng Δ có VTPT là $\vec{n} = 1; -2$.

Ta có $A(1; 2) \in d$, gọi A' đối xứng với A qua M khi đó $A' \in \Delta$

Ta có M là trung điểm của AA' .

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_M - x_A = 2 \cdot (-1) - 1 = -3 \\ y_{A'} = 2y_M - y_A = 2 \cdot 2 - 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow A'(-3; 2)$$

Vậy phương trình tổng quát đường thẳng Δ là $1 \cdot (x + 3) - 2 \cdot (y - 2) = 0$ hay $x - 2y + 7 = 0$.

Cách 2: Gọi $A(x_0; y_0)$ là điểm bất kỳ thuộc đường thẳng d , $A'(x; y)$ là điểm đối xứng với A qua M .

Khi đó M là trung điểm của AA' suy ra

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_0 + x}{2} \\ y_M = \frac{y_0 + y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = \frac{x_0 + x}{2} \\ 2 = \frac{y_0 + y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 - x \\ y_0 = 4 - y \end{cases}$$

Ta có $A \in d \Rightarrow x_0 - 2y_0 + 3 = 0$ suy ra

$$-2 - x - 2 \cdot (4 - y) + 3 = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 7 = 0$$

Vậy phương trình tổng quát của Δ đối xứng với đường thẳng d qua M là $x - 2y + 7 = 0$.

Ví dụ 3: Biết hai cạnh của một hình bình hành có phương trình $x - y = 0$ và $x + 3y - 8 = 0$, tọa độ một đỉnh của hình bình hành là $(-2; 2)$. Viết phương trình các cạnh còn lại của hình bình hành.

Lời giải

Đặt tên hình bình hành là $ABCD$ với $A(-2; 2)$, do tọa độ điểm A không là nghiệm của hai phương trình đường thẳng trên nên ta giả sử $BC: x - y = 0$, $CD: x + 3y - 8 = 0$

Vì $AB \parallel CD$ nên cạnh AB nhận $\vec{n}_{CD} = (1; 3)$ làm VTPT do đó có phương trình là

$$1. x + 2 + 3. y - 2 = 0 \text{ hay } x + 3y - 4 = 0$$

Tương tự cạnh AD nhận $\vec{n}_{BC} = (1; -1)$ làm VTPT do đó có phương trình là

$$1. x + 2 - 1. y - 2 = 0 \text{ hay } x - y + 4 = 0$$

Ví dụ 4: Cho điểm $M(1; 4)$. Viết phương trình đường thẳng qua M lần lượt cắt hai tia Ox , tia Oy tại A và B sao cho tam giác OAB có diện tích nhỏ nhất.

Lời giải:

Giả sử $A(a; 0)$, $B(0; b)$ với $a > 0, b > 0$. Khi đó đường thẳng đi qua A, B có dạng

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \text{ Do } M \in AB \text{ nên } \frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 1$$

$$\text{Mặt khác } S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} ab.$$

$$\text{Áp dụng BĐT Côsi ta có } 1 = \frac{1}{a} + \frac{4}{b} \geq 2\sqrt{\frac{4}{ab}} \Rightarrow ab \geq 16 \Rightarrow S_{OAB} \geq 8$$

$$\text{Suy ra } S_{OAB} \text{ nhỏ nhất khi } \frac{1}{a} = \frac{4}{b} \text{ và } \frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 1 \text{ do đó } a = 2; b = 8$$

$$\text{Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là } \frac{x}{2} + \frac{y}{8} = 1 \text{ hay } 4x + y - 8 = 0$$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.1: Cho điểm $A(1; -3)$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua A và

- Vuông góc với trục tung
- song song với đường thẳng $d: x + 2y + 3 = 0$

Bài 3.2: Cho tam giác ABC biết $A(2; 1)$, $B(-1; 0)$, $C(0; 3)$.

- Viết phương trình tổng quát của đường cao AH
- Viết phương trình tổng quát đường trung trực của đoạn thẳng AB .
- Viết phương trình tổng quát đường thẳng BC .
- Viết phương trình tổng quát đường thẳng qua A và song song với đường thẳng BC .

Bài 3.3: Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

- Δ đi qua điểm $M(2; 5)$ và song song với đường thẳng $d: 4x - 7y + 3 = 0$
- Δ đi qua $P(2; -5)$ và có hệ số góc $k = 11$.

Bài 3.4: Cho $M(8; 6)$. Viết phương trình đường thẳng qua M cắt chiều dương hai trục tọa độ tại A, B sao cho $OA + OB$ đạt giá trị nhỏ nhất.