DẠNG TOÁN 2: HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG .

1. Phương pháp giải.

a) Hệ đối xứng loại 1

Hệ phương trình đối xứng loại 1 là hệ phương trình có dạng:

(I) $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ với $f\left(x;y\right)=f\left(y;x\right)$ và $g\left(x;y\right)=g\left(y;x\right)$.

(Có nghĩa là khi ta hoán vị giữa x và y thì *f(x, y)* và *g(x, y)* không thay đổi).

Cách giải

- Đặt $S = x + y$, $P = xy$.
- Đưa hệ phương trình (I) về hệ (I') với các ẩn là S và P.
- Giải hệ (I') ta tìm được S và P.
- Tìm nghiệm $\left(x;y\right)$ bằng cách giải phương trình: $X^2 - SX + P = 0$.

b) Hệ đối xứng loại 2

Hệ phương trình đối xứng loại 2 là hệ phương trình có dạng: (II) $\begin{cases} f(x,y)=0 & (1) \\ f(y,x)=0 & (2) \end{cases}$

(Có nghĩa là khi hoán vị giữa x và y thì (1) biến thành (2) và ngược lại).

- Trừ (1) và (2) vế theo vế ta được: (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y)-f(y,x)=0 & (3) \\ f(x,y)=0 \end{cases}$
- Biến đổi (3) về phương trình tích: (3) $\Leftrightarrow (x-y).g(x,y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ g(x,y)=0 \end{array}\right.$.
- Như vậy (II) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x,y)=0 \\ x=y \end{cases} \\ \begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \end{array}\right.$.
- Giải các hệ phương trình trên ta tìm được nghiệm của hệ (II).

c) Chú ý: Hệ phương trình đối xứng loại 1, 2 nếu có nghiệm là $\left(x_0;y_0\right)$ thì $\left(y_0;x_0\right)$ cũng là một nghiệm của nó.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x+xy+y=2+3\sqrt{2} \\ x^2+y^2=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2y+xy^2=30 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$.

Lời giải

a) Đặt $S = x + y$; $P = xy$, ta có hệ:

$$\begin{cases} S + P = 2 + 3\sqrt{2} \\ S^2 - 2P = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + 2S = 10 + 6\sqrt{2} \\ S + P = 2 + 3\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (S+1)^2 = (3+\sqrt{2})^2 \\ P = 2 + 3\sqrt{2} - S \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} S = 2 + \sqrt{2} \\ S = -4 - \sqrt{2} \end{array}\right. \\ P = 2 + 3\sqrt{2} - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 + \sqrt{2} \\ P = 2\sqrt{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} S = -4 - \sqrt{2} \\ P = 6 + 4\sqrt{2} \end{cases}$$

- Với $S = 2 + \sqrt{2}$; $P = 2\sqrt{2}$ ta có x, y là nghiệm phương trình:

  $$X^2 - (2 + \sqrt{2})X + 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 2 \\ X = \sqrt{2} \end{array}\right.$$

- Với $S = -4 - \sqrt{2}$; $P = 6 + 4\sqrt{2}$ ta có x, y là nghiệm phương trình:

  $X^2 + (4 + \sqrt{2})X + 6 + 4\sqrt{2} = 0$ (vô nghiệm).

Vậy hệ có nghiệm $\left(x;y\right)$ là $(2;\sqrt{2})$ và $(\sqrt{2};2)$.

b) Đặt $\mathrm{S} = x + y,\ \mathrm{P} = xy$, điều kiện $\mathrm{S}^2 \geq 4\mathrm{P}$. Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} SP = 30 \\ S(S^2 - 3P) = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{30}{S} \\ S\left(S^2 - \dfrac{90}{S}\right) = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Ví dụ 2: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x^3 + 2x = y \\ y^3 + 2y = x \end{cases}$ b) $\begin{cases} y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x \\ x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x = \dfrac{x^2 + 2}{y^2} \\ 3y = \dfrac{y^2 + 2}{x^2} \end{cases}$

Lời giải

a) Trừ vế với vế của phương trình đầu và phương trình thứ hai ta được:

$x^3 - y^3 + 3x - 3y = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + y^2 + xy + 3) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(Vì $x^2 + y^2 + xy + 3 = \left[\left(x + \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3y^2}{4} + 3\right] > 0$)

Thay $x = y$ vào phương trình đầu ta được: $x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right) = \left(0;0\right)$.

b) Trừ vế với vế của phương trình đầu và phương trình thứ hai ta được:

$y^2 - x^2 = x^3 - y^3 - 3(x^2 - y^2) + 2(x - y)$

$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 2) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x - y)\left[x^2 + y^2 + (x + y - 2)^2\right] = 0 \Leftrightarrow x = y$

(vì $x^2 + y^2 + (x + y - 2)^2 > 0$)

Thay $x = y$ vào phương trình đầu ta được:

$x^3 - 4x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 4x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \pm \sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm: $(0;0);(2 + \sqrt{2};2 + \sqrt{2})$ và $(2 - \sqrt{2};2 - \sqrt{2})$.

c) ĐKXĐ: $x \neq 0$ và $y \neq 0$

Nhận xét từ hệ phương trình ta có phương trình có nghiệm $(x;y)$ thì $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} 3x = \dfrac{x^2 + 2}{y^2} \\ 3y = \dfrac{y^2 + 2}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3xy^2 = x^2 + 2 & (1) \\ 3yx^2 = y^2 + 2 & (2) \end{cases}$

Trừ (1) và (2) ta được: $(x - y)(3xy + x + y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (vì $3xy + x + y > 0$)

Với $x = y$: (1) $\Leftrightarrow 3x^3 - x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(3x^2 + 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y) = (1;1)$.

Ví dụ 3: Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = m + 6 \\ 2x + xy + 2y = m \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Lời giải

Giả sử hệ phương trình có nghiệm $(x_0;y_0)$ thế thì $(y_0;x_0)$ cũng là một nghiệm của hệ. Vậy hệ có nghiệm suy nhất thì $x_0 = y_0$ suy ra $\begin{cases} 3x_0^2 = m + 6 \\ x_0^2 + 4x_0 = m \end{cases} \Rightarrow 3x_0^2 = x_0^2 + 4x_0 + 6$

$\Leftrightarrow 2x_0^2 - 4x_0 - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \Rightarrow m = -3 \\ x_0 = 3 \Rightarrow m = 21 \end{array}\right.$

+ Với $m = -3$ hệ trở thành $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ 2(x + y) + xy = -3 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$, $S^2 \geq 4P$ hệ phương trình trở thành $\begin{cases} S^2 - P = 3 \\ 2S + P = -3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + 2S = 0 \\ P = -2S - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} S = 0 \\ S = -2 \end{array}\right. \\ P = -2S - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 0 \\ P = -3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} S = -2 \\ P = 1 \end{cases}$

Khi $\begin{cases} S = 0 \\ P = -3 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} x + y = -2 \\ xy = 1 \end{cases}$ suy ra x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = \sqrt{3} \\ X = -\sqrt{3} \end{array}\right.$

Do đó hệ có nghiệm là $\left(\sqrt{3}; -\sqrt{3}\right)$ và $\left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$

Suy ra $m = -3$ thì hệ phương trình không có nghiệm duy nhất..

+ Với $m = 21$ hệ trở thành $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 27 \\ 2x + xy + 2y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - xy = 27 \\ 2(x + y) + xy = 21 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$, $S^2 \geq 4P$ hệ phương trình trở thành $\begin{cases} S^2 - P = 27 \\ 2S + P = 21 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + 2S - 48 = 0 \\ P = -2S + 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} S = 6 \\ S = -8 \end{array}\right. \\ P = -2S + 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 6 \\ P = 9 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} S = -8 \\ P = 37 \end{cases}$ (loại)

Khi $\begin{cases} S = 6 \\ P = 9 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 9 \end{cases}$ suy ra x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - 6X + 9 = 0 \Leftrightarrow X = 3$

Suy ra hệ có nghiệm duy nhất $\left(x; y\right) = \left(3; 3\right)$

Vậy với $m = 21$ thì hệ có nghiệm duy nhất..

Ví dụ 4: Cho $\left(x; y\right)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 2m - 1 \\ x^2 + y^2 = 2m^2 + 2m - 3 \end{cases}$. Tìm m để xy nhỏ nhất.

Lời giải

Đặt $S = x + y,\ P = xy$, điều kiện $S^2 \geq 4P$.

Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} S = 2m - 1 \\ S^2 - 2P = 2m^2 + 2m - 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} S = 2m - 1 \\ (2m - 1)^2 - 2P = 2m^2 + 2m - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2m - 1 \\ P = m^2 - 3m + 2 \end{cases}$

Điều kiện $S^2 \geq 4P$ suy ra $(2m-1)^2 \geq 4\left(m^2-3m+2\right) \Leftrightarrow 8m \geq 7 \Leftrightarrow m \geq \frac{7}{8}$ (*)

Ta có $P = xy = m^2 - 3m + 2 = \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$ (thỏa mãn (*))

Vậy $m = \frac{3}{2}$ thì xy đạt giá trị nhỏ nhất.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.56: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x + y + 2xy = 2 \\ x^3 + y^3 = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19 \\ (x+y)(8+xy) = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + 3xy = 5 \\ 2x^2 + 2y^2 - 3xy = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y + xy = -2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

Bài 3.57: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^2 = 3x + 2y \\ y^2 = 3y + 2x \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2} = 2x + y \\ \dfrac{3}{y^2} = 2y + x \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^3 = 2x - y \\ y^3 = 2y - x \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{3}{x} = x^2 + 2y^2 \\ \dfrac{3}{y} = 2x^2 + y^2 \end{cases}$

Bài 3.58: Tìm m để các hệ phương trình $\begin{cases} x = y^2 - y + m \\ y = x^2 - x + m \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.