➢ DẠNG TOÁN 2: PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

1. Phương pháp giải.

Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu ta thường

- Quy đồng mẫu số (chú ý cần đặt điều kiện mẫu số khác không)
- Đặt ẩn phụ

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau

a) $\dfrac{2x+1}{3x+2}=\dfrac{x+1}{x-2}$ b) $1+\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{10}{x+3}-\dfrac{50}{(2-x)(x+3)}$.

c) $\dfrac{x+3}{(x+1)^2}=\dfrac{4x-2}{(2x-1)^2}$. d) $\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{2x+1}{x+1}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x\neq -\dfrac{2}{3}$ và $x\neq 2$.

Phương trình tương đương với

$\left(2x+1\right)\left(x-2\right)=\left(x+1\right)\left(3x+2\right)\Leftrightarrow 2x^2-4x+x-2=3x^2+2x+3x+2$

$\Leftrightarrow x^2+8x+4=0\Leftrightarrow x=-4\pm 2\sqrt{3}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-4\pm 2\sqrt{3}$.

b) ĐKXĐ: $x\neq -3$ và $x\neq 2$.

Phương trình tương đương với $\left(2-x\right)\left(x+3\right)-2\left(x+3\right)=10\left(2-x\right)-50$

$\Leftrightarrow x^2-7x-30=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=10 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x=10$.

c) ĐKXĐ: $x\neq -1$ và $x\neq \dfrac{1}{2}$.

Phương trình tương đương với

$\dfrac{x+3}{(x+1)^2}=\dfrac{2}{2x-1}\Leftrightarrow \left(x+3\right)\left(2x-1\right)=2\left(x+1\right)^2$

$\Leftrightarrow x=5$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=5$.

d) ĐKXĐ: $x\neq \pm 2$ và $x\neq -1$

Phương trình tương đương với

$\left(x+1\right)^2\left(x-2\right)+\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x+2\right)=\left(2x+1\right)\left(x-2\right)\left(x+2\right)$

$\Leftrightarrow \left(x^2+2x+1\right)\left(x-2\right)+\left(x^2-1\right)\left(x+2\right)=\left(2x+1\right)\left(x^2-4\right)$

$\Leftrightarrow x^3-2x^2+2x^2-4x+x-2+x^3+2x^2-x-2=2x^3-8x+x^2-4$

$\Leftrightarrow x^2+4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-4 \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-4$ và $x=0$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau

a) $\dfrac{4}{2x+1}+\dfrac{3}{2x+2}=\dfrac{2}{2x+3}+\dfrac{1}{2x+4}$.

b) $\dfrac{1}{x^2+5x+4}+\dfrac{1}{x^2+11x+28}+\dfrac{1}{x^2+17x+70}=\dfrac{3}{4x-2}$

c) $1+\dfrac{4}{\left(2-x\right)^2}=\dfrac{5}{x^2}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x\notin\left\{-2;-\dfrac{3}{2};-1;-\dfrac{1}{2}\right\}$

Phương trình tương đương với

$\dfrac{4}{2x+1}-\dfrac{2}{2x+3}=\dfrac{1}{2x+4}-\dfrac{3}{2x+2}\Leftrightarrow\dfrac{4x+10}{4x^2+8x+3}=\dfrac{-4x-10}{4x^2+12x+8}$

$\Leftrightarrow\left(4x+10\right)\left(\dfrac{1}{4x^2+8x+3}+\dfrac{1}{4x^2+12x+8}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(4x+10\right)\left(4x^2+8x+3+4x^2+12x+8\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(4x+10\right)\left(8x^2+20x+11\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 4x+10=0 \\ 8x^2+20x+11=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{5}{2} \\ x=\dfrac{-5\pm\sqrt{3}}{4} \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{3}}{4}$ và $x=-\dfrac{5}{2}$

b) Điều kiện: $x \notin \left\{-10;-7;-4;-1;\frac{1}{2}\right\}$

Phương trình tương đương với

$$\frac{1}{(x+1)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+7)}+\frac{1}{(x+7)(x+10)}=\frac{3}{4x-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+7}-\frac{1}{x+10}\right)=\frac{3}{4x-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+10}\right)=\frac{3}{4x-2} \Leftrightarrow x^2+7x+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-4 \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện thì phương trình có nghiệm duy nhất $x=-3$.

c) ĐKXĐ: $x \neq 0$ và $x \neq 2$.

Phương trình tương đương với $x^2+\frac{4x^2}{(2-x)^2}=5$

$$\Leftrightarrow x^2-\frac{4x^2}{2-x}+\frac{4x^2}{(2-x)^2}+\frac{4x^2}{2-x}-5=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{2x}{2-x}\right)^2+\frac{4x^2}{2-x}-5=0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{2-x}\right)^2+\frac{4x^2}{2-x}-5=0$$

Đặt $t=\frac{x^2}{2-x}$, phương trình trở thành

$$t^2+4t-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-5 \end{array}\right.$$

Với $t=1$ ta có $\frac{x^2}{2-x}=1 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Với $t=-5$ ta có $\frac{x^2}{2-x}=-5 \Leftrightarrow x^2-5x+10=0$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-2$ và $x=1$

Ví dụ 3: Giải và biện luận phương trình sau với m là tham số.

a) $\frac{x-m}{x+1}=2$ (1)

b) $\frac{x^2+mx+2}{x^2-1}=1$ (2)

c) $\dfrac{x^2+mx+2}{3-x}=2m+6$ (3) d) $\dfrac{\left|3x+mx+2\right|}{\left|x+1\right|}=m$ (4)

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \neq -1$

Phương trình tương đương với $x-m=2\left(x+1\right)$

$\Leftrightarrow x=-m-2$

Đối chiếu với điều kiện ta xét $-m-2 \neq -1 \Leftrightarrow m \neq -1$

Kết luận

$m \neq -1$ phương trình (1) có nghiệm là $x=-m-2$

$m=-1$ phương trình (1) vô nghiệm

b) ĐKXĐ: $x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow x^2+mx+2=x^2-1$

$\Leftrightarrow mx=-3$ (2')

Với $m=0$: Phương trình (2') trở thành $0x=-3$ suy ra phương trình (2') vô nghiệm do đó phương trình (2) vô nghiệm

Với $m \neq 0$ phương trình (2') tương đương với $x=\dfrac{-3}{m}$

Đối chiếu điều kiện xét $\dfrac{-3}{m} \neq \pm 1 \Leftrightarrow m \neq \pm 3$ suy ra $m \neq \pm 3$ thì phương trình (2') có nghiệm $x=\dfrac{-3}{m}$ và là nghiệm của phương trình (2). Còn $m=3$ thì phương trình (2') có nghiệm là $x=-1$, $m=-3$ thì phương trình (2') có nghiệm là $x=1$ do đó phương trình (2) vô nghiệm.

Kết luận

$m \in \left\{-3;0;3\right\}$ phương trình (2) vô nghiệm

$m \notin \left\{-3;0;3\right\}$ phương trình (2) có nghiệm $x=\dfrac{-3}{m}$

c) ĐKXĐ: $x \neq 3$

Phương trình (3) $\Leftrightarrow x^2+mx+2=\left(3-x\right)\left(2m+6\right)$

$\Leftrightarrow x^2+\left(3m+4\right)x-6m-16=0$

$\Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(x+3m+8\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-3m-8 \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện ta xét $-3m-8 \neq 3 \Leftrightarrow m \neq -\dfrac{5}{3}$

Kết luận

$m=-\frac{5}{3}$ phương trình (3) có nghiệm là $x=-2$

$m\neq-\frac{5}{3}$ phương trình có nghiệm là $x=2$ và $x=-3m-8$

d) ĐKXĐ: $x\neq-1$

TH1: Nếu $m<0$ ta có $VP(4)\geq 0, VT(4)<0$ suy ra phương trình vô nghiệm

TH2: Nếu $m\geq 0$ phương trình tương đương với

$$\left|3x+mx+2\right|=m\left|x+1\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x+mx+2=m\left(x+1\right)\\3x+mx+2=-m\left(x+1\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{m-2}{3}\\\left(2m+3\right)x=-m-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{m-1}{2}\\x=\dfrac{-m-2}{2m+3}\end{array}\right.$$

- Với $x=\frac{m-1}{2}$ ta xét $\frac{m-1}{2}\neq-1\Leftrightarrow m\neq-1$(luôn đúng) do đó với $m\geq 0$ thì phương trình (4) luôn nhận $x=\frac{m-1}{2}$ là nghiệm
- Với $x=\frac{-m-2}{2m+3}$ ta xét $\frac{-m-2}{2m+3}\neq-1\Leftrightarrow m\neq-1$ (luôn đúng) do đó với $m\geq 0$ thì phương trình (4) luôn nhận $x=\frac{-m-2}{2m+3}$ là nghiệm

Kết luận

$m<0$ phương trình (4) vô nghiệm

$m\geq 0$ phương trình (4) có hai nghiệm $x=\frac{m-1}{2}$ và $x=\frac{-m-2}{2m+3}$

Ví dụ 4: Tìm điều kiện của tham số a và b để phương trình

$$\frac{a}{x-a}-\frac{b}{x-b}=\frac{a^2-b^2}{x^2-\left(a+b\right)x+ab}\ (*)$$

a) Có nghiệm duy nhất

b) Có nghiệm

Lời giải

ĐKXĐ: $x\neq a$ và $x\neq b$

Phương trình tương đương với $\frac{a(x-b)-b(x-a)}{(x-a)(x-b)}=\frac{a^2-b^2}{x^2-(a+b)x+ab}$

$\Leftrightarrow (a-b)x=a^2-b^2$ (**)

a) Phương trình (*) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (**) có nghiệm duy nhất khác a và b

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b\neq 0 \\ \frac{a^2-b^2}{a-b}\neq a \\ \frac{a^2-b^2}{a-b}\neq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq b \\ a+b\neq a \\ a+b\neq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq b \\ a\neq 0 \\ b\neq 0 \end{cases}$$

Vậy phương trình (*) có nghiệm duy nhất khi $\begin{cases} a\neq b \\ a\neq 0 \\ b\neq 0 \end{cases}$

b) Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (**) có nghiệm khác a và b

Với $a=b$ thì phương trình (**) trở thành $0x=0$ suy ra phương trình (**) có nghiệm đúng với mọi x do đó phương trình (*) có nghiệm.

Với $a\neq b$ thì phương trình (**) tương đương với $x=\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$

Suy ra phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} a+b\neq a \\ a+b\neq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ b\neq 0 \end{cases}$

Vậy phương trình (*) có nghiệm khi $\begin{cases} a\neq 0 \\ b\neq 0 \\ a\neq b \end{cases}$ hoặc $a=b$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.28: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{13}{2x^2+x-21}+\frac{1}{2x+7}=\frac{6}{x^2-9}$

b) $\frac{4}{2x^3+3x^2-8x-12}+\frac{1}{2x+3}=\frac{1}{x^2-4}+\frac{4}{2x^2+7x+6}$

c) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-2}{x+2}+\frac{x-3}{x+3}+\frac{x+4}{x-4}=4$

Bài 3.29: Giải phương trình

a) $\dfrac{2x}{3x^2-5x+2}+\dfrac{13x}{3x^2+x+2}=6$ b) $\dfrac{x^4+3x^2+1}{x^3+x^2-x}=3$

c) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}=15$

Bài 3.30: Giải phương trình

a) $\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^2+\dfrac{x+1}{x-3}=12\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)^2$ b) $\dfrac{2(x+1)}{3x^2+x}+\dfrac{13(x+1)}{3x^2+7x+6}=6$

Bài 3.31: Giải và biện luận phương trình sau $\dfrac{ax-1}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{a\left(x^2+1\right)}{x^2-1}$

Bài 3.32: Tìm điều kiện a,b để phương trình $\dfrac{a}{x-b}+\dfrac{b}{x-a}=2$ có hai nghiệm phân biệt.