

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

☞ DẠNG TOÁN 1: TÍNH GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC, BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng công thức lượng giác một cách linh hoạt để biến đổi biểu thức lượng giác nhằm triệt tiêu các giá trị lượng giác của góc không đặc biệt và đưa về giá trị lượng giác đặc biệt.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Tính các giá trị lượng giác sau: $\cos 795^\circ$, $\sin 18^\circ$, $\tan \frac{7\pi}{12}$, $\cot \frac{5\pi}{8}$.

Lời giải

- Vì $795^\circ = 75^\circ + 2.360^\circ = 30^\circ + 45^\circ + 2.360^\circ$ nên

$$\cos 795^\circ = \cos 75^\circ = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

- Vì $54^\circ + 36^\circ = 90^\circ$ nên $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ$

$$\text{Mà } \cos 36^\circ = \cos 2 \cdot 18^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ$$

$$\sin 54^\circ = \sin 18^\circ + 36^\circ = \sin 18^\circ \cos 36^\circ + \sin 36^\circ \cos 18^\circ$$

$$= \sin 18^\circ \cdot (1 - 2\sin^2 18^\circ) + 2\sin 18^\circ \cos^2 18^\circ = \sin 18^\circ \cdot (1 - 2\sin^2 18^\circ) + 2\sin 18^\circ (1 - \sin^2 18^\circ)$$

$$= 3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ$$

$$\text{Do đó } 3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ \Leftrightarrow \sin 18^\circ - 1 - 4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 18^\circ = 1 \text{ hoặc } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \text{ hoặc } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$\text{Vì } 0 < \sin 18^\circ < 1 \text{ nên } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

- $\tan \frac{7\pi}{12} = \tan \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$

$$\bullet \cot \frac{5\pi}{8} = \cot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = -\tan \frac{\pi}{8}$$

$$\text{Ta lại có } 1 = \tan \frac{\pi}{4} = \tan \left(2 \cdot \frac{\pi}{8} \right) = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}} \text{ suy ra}$$

$$1 - \tan^2 \frac{\pi}{8} = 2 \tan \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow \tan^2 \frac{\pi}{8} + 2 \tan \frac{\pi}{8} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{\pi}{8} = -1 - \sqrt{2} \text{ hoặc } \tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$$

$$\text{Do } \tan \frac{\pi}{8} > 0 \text{ nên } \tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } \cot \frac{5\pi}{8} = 1 - \sqrt{2}$$

Ví dụ 2: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

$$\text{a) } A = \sin 22^{\circ}30' \cos 202^{\circ}30'$$

$$\text{b) } B = 4 \sin^4 \frac{\pi}{16} + 2 \cos \frac{\pi}{8}$$

$$\text{c) } C = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15}}{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{15}}$$

$$\text{d) } D = \sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9}$$

Lời giải

$$\text{a) Cách 1: Ta có } \cos 202^{\circ}30' = \cos (180^{\circ} + 22^{\circ}30') = -\cos 22^{\circ}30'$$

$$\text{Do đó } A = -\sin 22^{\circ}30' \cos 22^{\circ}30' = -\frac{1}{2} \sin 45^{\circ} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Cách 2: } A = \frac{1}{2} [\sin (22^{\circ}30' + 202^{\circ}30') + \sin (22^{\circ}30' - 202^{\circ}30')] = \frac{1}{2} [\sin 225^{\circ} + \sin -180^{\circ}]$$

$$= \frac{1}{2}[\sin 180^\circ + 45^\circ - \sin 180^\circ] = -\frac{1}{2} \sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{b) } B = \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{16}\right)^2 + 2 \cos \frac{\pi}{8} = \left[1 - \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{16}\right)\right]^2 + 2 \cos \frac{\pi}{8}$$

$$= 1 - 2 \cos \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} + 2 \cos \frac{\pi}{8} = 1 + \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = 1 + \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{6 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{c) } C = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15}}{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{15}} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{15}\right) \sin \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{15}\right)}{-2 \sin \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{15}\right) \sin \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{15}\right)} = -\frac{\cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = -\cot \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

$$\text{d) } D = \left(\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9}\right) - \sin \frac{5\pi}{9} = 2 \sin \frac{4\pi}{9} \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{9} = \sin \frac{4\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} = 0$$

Ví dụ 3: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

$$\text{a) } A = \frac{1}{\cos 290^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3} \sin 250^\circ}$$

$$\text{b) } B = 1 + \tan 20^\circ \quad 1 + \tan 25^\circ$$

$$\text{c) } C = \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ$$

$$\text{d) } D = \sin^2 \frac{\pi}{9} + \sin^2 \frac{2\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9}$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \cos 290^\circ = \cos 180^\circ + 90^\circ + 20^\circ = -\cos 90^\circ + 20^\circ = \sin 20^\circ$$

$$\sin 250^\circ = \sin 180^\circ + 90^\circ - 20^\circ = -\sin 90^\circ - 20^\circ = -\cos 20^\circ$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\sqrt{3} \cos 20^\circ} = \frac{\sqrt{3} \sin 20^\circ - \sin 20^\circ}{\sqrt{3} \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ} = 4 \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 20^\circ - \frac{1}{2} \sin 20^\circ}{\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ} \\ &= 4 \frac{\sin 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 60^\circ \sin 20^\circ}{\sqrt{3} \sin 40^\circ} = \frac{4 \sin 40^\circ}{\sqrt{3} \sin 40^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

b) Cách 1: Ta có $B = \left(1 + \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}\right) \left(1 + \frac{\sin 25^\circ}{\cos 25^\circ}\right) = \frac{\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} \cdot \frac{\sin 25^\circ + \cos 25^\circ}{\cos 25^\circ}$

$$= \sqrt{2} \cdot \frac{\sin 20^\circ \cos 45^\circ + \cos 20^\circ \sin 45^\circ}{\cos 20^\circ} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sin 25^\circ \cos 45^\circ + \cos 25^\circ \sin 45^\circ}{\cos 25^\circ}$$
$$= 2 \frac{\sin 65^\circ \sin 70^\circ}{\cos 20^\circ \cos 25^\circ} = 2$$

Cách 2: Ta có $\tan 45^\circ = \tan 20^\circ + 50^\circ = \frac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 25^\circ}$

Suy ra $1 = \frac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 25^\circ} \Leftrightarrow \tan 20^\circ + \tan 25^\circ + \tan 20^\circ \tan 25^\circ = 1$

$$\Leftrightarrow 1 + \tan 20^\circ + \tan 25^\circ = 2.$$

Vậy $B = 2$

c) $C = \tan 9^\circ + \tan 81^\circ - \tan 27^\circ + \tan 63^\circ$

$$= \frac{\sin 9^\circ \cos 81^\circ + \sin 81^\circ \cos 9^\circ}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ} - \frac{\sin 27^\circ \cos 63^\circ + \sin 63^\circ \cos 27^\circ}{\cos 27^\circ \cos 63^\circ}$$
$$= \frac{1}{\cos 9^\circ \sin 9^\circ} - \frac{1}{\cos 27^\circ \sin 27^\circ} = \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = \frac{2 \sin 54^\circ - \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ}$$
$$= \frac{4 \cos 36^\circ \cdot \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ} = 4$$

d) $D = \sin^2 \frac{\pi}{9} + \sin^2 \frac{2\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} = \left(\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{2\pi}{9} \right)^2 - \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9}$

$$= \left(2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{18} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{9} \right) = \cos^2 \frac{\pi}{18} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{\pi}{9} \right)$$
$$= \frac{1 + \cos \frac{\pi}{9}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{\pi}{9} \right) = \frac{3}{4}$$

Lưu ý: Biến đổi sau thường xuyên được sử dụng

- $\sin x \pm \sqrt{3} \cos x = 2 \left[\frac{1}{2} \sin x \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right] = 2 \sin(x \pm \frac{\pi}{3})$
- $\sqrt{3} \sin x \pm \cos x = 2 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \pm \frac{1}{2} \cos x \right] = 2 \sin(x \pm \frac{\pi}{6})$
- $\sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right] = \sqrt{2} \sin(x \pm \frac{\pi}{4})$.

Ví dụ 4: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

a) $A = \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8}$

b) $B = \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ$

c) $C = \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5}$

d) $D = \cos^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{2\pi}{7} + \cos^2 \frac{3\pi}{7}$

Lời giải

a) $A = \frac{1}{2} \left(2 \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \right) \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{16}$

b) Ta có $B = \frac{1}{2} \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ do đó

$$\begin{aligned} 16 \sin 20^\circ \cdot B &= 8 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \\ &= 4 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \\ &= 2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ = \sin 160^\circ \end{aligned}$$

Suy ra $B = \frac{\sin 160^\circ}{16 \sin 20^\circ} = \frac{1}{16}$.

c) Ta có $C = 2 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}$. Vì $\sin \frac{\pi}{5} \neq 0$ nên

$$2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot C = 4 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = 2 \sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{4\pi}{5}$$

Suy ra $C = \frac{1}{2}$

$$c) D = \frac{1 + \cos \frac{2\pi}{7}}{2} + \frac{1 + \cos \frac{4\pi}{7}}{2} + \frac{1 + \cos \frac{6\pi}{7}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right)$$

Xét $T = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$, vì $\sin \frac{\pi}{7} \neq 0$ nên

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{\pi}{7} T &= 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} \\ &= \left(\sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \right) + \left(\sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} \right) + \left(\sin \pi - \sin \frac{5\pi}{7} \right) \\ &= -\sin \frac{\pi}{7} \end{aligned}$$

Suy ra $T = -\frac{1}{2}$.

$$\text{Vậy } D = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{5}{4}.$$

Ví dụ 5: Cho α, β thỏa mãn $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Tính $\cos \alpha - \beta$ và $\sin \alpha + \beta$.

Lời giải

- Ta có $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}$ (1)

$$\cos \alpha + \cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta = \frac{3}{2}$$
 (2)

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta &= 2 \\ \Leftrightarrow 2 + 2 \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta &= 2 \Leftrightarrow 2 \cos \alpha - \beta = 0 \end{aligned}$$

Vậy $\cos \alpha - \beta = 0$

• Từ giả thiết ta có $\sin \alpha + \sin \beta \quad \cos \alpha + \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin \alpha + \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Mặt khác $\sin 2\alpha + \sin 2\beta = 2 \sin \alpha + \beta \cos \alpha - \beta = 0$ (Do $\cos \alpha - \beta = 0$)

Suy ra $\sin \alpha + \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Bài tập rèn luyện.

Bài 6.26: Tính các giá trị lượng giác sau $\sin \frac{\pi}{8}$, $\sin \frac{\pi}{16}$, $\cot \frac{11\pi}{12}$

Bài 6.27: Tính giá trị của biểu thức sau:

a) $A = 4 \sin 45^0 \cos 12^0 \cos 3^0 - \sin 54^0 - \sin 36^0$

b) $B = 1 - \cot 23^0 \quad 1 - \cot 22^0$

c) $C = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9}$

d) $D = \frac{2 \sin \frac{\pi}{5} + \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{20}}{2 \cos \frac{\pi}{5} - \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{20}}$

Bài 6.28: Tính:

a) Tính giá trị lượng giác của góc $\frac{\pi}{12}$

b) $\cos^4 \frac{\pi}{24} - \sin^4 \frac{\pi}{24}$

c) $\cos 36^0 - \cos 72^0$

d) $\sin 10^0 \sin 50^0 \sin 70^0$

Bài 6.29: Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \cos^2 73^0 + \cos^2 47^0 + \cos 73^0 \cos 47^0$

b) $B = \sin 6^0 \sin 42^0 \sin 66^0 \sin 78^0$

c) $C = \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7}$

d) $D = \frac{1}{\sin 10^0} - 4 \sin 70^0$

Bài 6.30: Cho α, β thỏa mãn $\sin \alpha + \sin \beta = m$ và $\cos \alpha + \cos \beta = n$, $mn \neq 0$.

Tính $\cos \alpha - \beta$, $\cos \alpha + \beta$ và $\sin \alpha + \beta$.

Bài 6.31: Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{7\pi}{30} \sin \frac{13\pi}{30} \sin \frac{19\pi}{30} \sin \frac{25\pi}{30}$

b) $\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ$

c) $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}$

Bài 6.32: Tính giá trị của biểu thức sau:

a) $A = \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{5\pi}{7}$

b) $B = \cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$

c) $C = \sin 6^\circ \cdot \sin 42^\circ \cdot \sin 66^\circ \cdot \sin 78^\circ$

d) $E = \cos \frac{2\pi}{31} \cdot \cos \frac{4\pi}{31} \cdot \cos \frac{8\pi}{31} \cdot \cos \frac{16\pi}{31} \cdot \cos \frac{32\pi}{31}$

e) $F = \sin 5^\circ \cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 25^\circ \dots \sin 75^\circ \cdot \sin 85^\circ$

Bài 6.33: Tính $A = 1 + \tan 1^\circ \cdot 1 + \tan 2^\circ \dots 1 + \tan 45^\circ$

Bài 6.34: Tính $A = \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha \dots \cos 999\alpha$ với $\alpha = \frac{2\pi}{1999}$