

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

➤ DẠNG TOÁN 1: GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN, BA ẨN.

1. Phương pháp giải.

- Sử dụng phương pháp cộng đại số, phương pháp thế, dùng định thức.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau

$$a) \begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 7x - 9y = 8 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + y = 11 \\ 5x - 4y = 8 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \sqrt{2}x + 4y = -1 \\ 2x + 4\sqrt{2}y = 5 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \sqrt{3}x - y = 1 \\ 5x + \sqrt{2}y = \sqrt{3} \end{cases}$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } D = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} = -17, D_x = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 8 & -9 \end{vmatrix} = 5, D_y = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 19$$

$$\text{Suy ra hệ phương trình có nghiệm là } (x; y) = \left(\frac{D_x}{D}; \frac{D_y}{D} \right) = \left(-\frac{5}{17}; -\frac{19}{17} \right)$$

$$b) \text{ Ta có } D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -13, D_x = \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = -52, D_y = \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -39$$

$$\text{Suy ra hệ phương trình có nghiệm là } (x; y) = \left(\frac{D_x}{D}; \frac{D_y}{D} \right) = (4; 3)$$

$$c) \text{ Ta có } D = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 4 \\ 2 & 4\sqrt{2} \end{vmatrix} = 0, D_x = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 4\sqrt{2} \end{vmatrix} = -4\sqrt{2} - 20 \neq 0$$

Suy ra hệ phương trình vô nghiệm

$$d) \text{ Ta có } D = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 5 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 11, D_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2} + \sqrt{3}, D_y = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 5 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = -2$$

$$\text{Suy ra hệ phương trình có nghiệm là } (x; y) = \left(\frac{D_x}{D}; \frac{D_y}{D} \right) = \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{11}; -\frac{2}{11} \right)$$

Ví dụ 2: Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} (x + 3)y - 5 = xy \\ (x - 2)(y + 5) = xy \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} |x - y| = \sqrt{2} \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{3(x + y)}{x - y} = -7 \\ \frac{5x - y}{y - x} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Lời giải

a) Hệ phương trình tương đương với
$$\begin{cases} xy - 5x + 3y - 15 = xy \\ xy + 5x - 2y - 10 = xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 3y = 15 \\ 5x - 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 25 \\ 5x - 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 25 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (12; 25)$

b) Hệ phương trình tương đương với
$$\begin{cases} x - y = \pm\sqrt{2} \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \sqrt{2} \\ 2x - y = -1 \end{cases} \text{ (1) hoặc } \begin{cases} x - y = -\sqrt{2} \\ 2x - y = -1 \end{cases} \text{ (2)}$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{2} \\ 2x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{2} \\ y = -1 - 2\sqrt{2} \end{cases}$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \sqrt{2} \\ 2x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \sqrt{2} \\ y = -1 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là $(-1 - \sqrt{2}; -1 - 2\sqrt{2})$ và $(-1 + \sqrt{2}; -1 + 2\sqrt{2})$

c) ĐKXD: $x \neq y$

Hệ phương trình tương đương với
$$\begin{cases} 3(x + y) = -7(x - y) \\ 3(5x - y) = 5(y - x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 4y = 0 \\ 20x - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ (không thỏa mãn)}$$

Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 3: Giải các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 3 \\ \frac{9}{x} - \frac{10}{y} = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{6}{x - 2y} + \frac{2}{x + 2y} = 3 \\ \frac{3}{x - 2y} + \frac{4}{x + 2y} = -1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{6x-3}{y-1} - \frac{2y}{x+1} = 5 \\ \frac{4x-2}{y-1} - \frac{4y}{x+1} = 2 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 2|x-6| + 3|y+1| = 5 \\ 5|x-6| - 4|y+1| = 1 \end{cases}$$

Lời giải

$$\text{a) ĐKXD: } \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ v = \frac{1}{y} \end{cases}. \text{ Hệ đã cho trở thành } \begin{cases} 6u + 5v = 3 \\ 9u - 10v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{3} \\ v = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\text{Ta được hệ phương trình: } \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (3; 5)$.

$$\text{b) ĐKXD: } \begin{cases} x - 2y \neq 0 \\ x + 2y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \frac{1}{x-2y} \\ v = \frac{1}{x+2y} \end{cases}. \text{ Hệ đã cho trở thành } \begin{cases} 6u + 2v = 3 \\ 3u + 4v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{7}{9} \\ v = -\frac{5}{6} \end{cases}$$

$$\text{Ta được hệ phương trình: } \begin{cases} \frac{7}{9} = \frac{1}{x-2y} \\ -\frac{5}{6} = \frac{1}{x+2y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = \frac{9}{7} \\ x + 2y = -\frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{70} \\ y = -\frac{87}{140} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = \left(\frac{3}{70}; -\frac{87}{140}\right)$.

$$\text{c) ĐKXD: } \begin{cases} x \neq -1 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \frac{2x-1}{y-1} \\ v = \frac{y}{x+1} \end{cases}. \text{ Hệ đã cho trở thành } \begin{cases} 3u - 2v = 5 \\ 2u - 4v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta được hệ phương trình: } \begin{cases} \frac{2x-1}{y-1} = 2 \\ \frac{y}{x+1} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = -1 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

$$\text{d) Đặt } \begin{cases} u = |x-6| \\ v = |y+1| \end{cases}, u \geq 0, v \geq 0, \text{ hệ phương trình trở thành } \begin{cases} 2u + 3v = 5 \\ 5u - 4v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases}$$

$$\text{Thay vào ta có } \begin{cases} 1 = |x-6| \\ 1 = |y+1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6 = \pm 1 \\ y+1 = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 5 \\ y = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là $(7; 0), (7; -2), (5; 0), (5; -2)$.

$$\text{Ví dụ 4: Giải hệ phương trình } \begin{cases} 3x + y - 3z = 1 & (1) \\ x - y + 2z = 2 & (2) \\ -x + 2y + 2z = 3 & (3) \end{cases}$$

Lời giải

Cách 1 (Phương pháp cộng đại số): Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 7y + 3z = 10 \\ y + 4z = 5 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25z = 25 \\ y + 4z = 5 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y; z) = (1; 1; 1)$.

Cách 2 (Phương pháp thế): Ta có (2) $\Leftrightarrow x = y - 2z + 2$ thế vào (1) ta được

$$3(y - 2z + 2) + y - 3z = 1 \Leftrightarrow 4y - 9z = -5 \quad (*)$$

(3) $\Leftrightarrow x = 2y + 2z - 3$ thế vào (1) ta được

$$3(2y + 2z - 3) + y - 3z = 1 \Leftrightarrow 3z = 10 - 7y \text{ thế vào } (*) \text{ ta được}$$

$$4y - 3(10 - 7y) = -5 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = z = 1$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y; z) = (1; 1; 1)$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.45: Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 2y = 5 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} (\sqrt{2} + 1)x + y = \sqrt{2} - 1 \\ 2x - (\sqrt{2} - 1)y = 2\sqrt{2} \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y = 16 \\ \frac{5}{2}x - \frac{3}{5}y = 11 \end{cases} \end{array}$$

Bài 3.46: Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ x - 3y + z = 5 \\ x - 5y = 1 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ x - 2y - 3z = 0 \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} x + 3y + 2z = 8 \\ 2x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 6 \end{cases} \\ \text{d) } \begin{cases} x - 3y + 2z = -7 \\ -2x + 4y + 3z = 8 \\ 3x + y - z = 5 \end{cases} \end{array}$$

Bài 3.47: Giải các hệ phương trình sau

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \frac{5}{8} \\ \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = \frac{3}{8} \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} 2|x+y| - |x-y| = 9 \\ 3|x+y| + 2|x-y| = 17 \end{cases} \\ \text{d) } \begin{cases} 4|x+y| + 3|x-y| = 8 \\ 3|x+y| - 5|x-y| = 6 \end{cases} \end{array}$$