B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG 1: Xác định các yếu tố trong tam giác.

1. Phương pháp.

- Sử dụng định lí côsin và định lí sin
- Sử dụng công thức xác định độ dài đường trung tuyến và mối liên hệ của các yếu tố trong các công thức tính diện tích trong tam giác.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 5$ và $\cos A = \frac{3}{5}$.

Tính cạnh BC, và độ dài đường cao kẻ từ A.

Lời giải

Áp dụng định lí côsin ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 4^2 + 5^2 - 2.4.5.\frac{3}{5} = 29$$

Suy ra $BC = \sqrt{29}$

Vì $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ nên $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

Theo công thức tính diện tích ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}.4.5.\frac{4}{5} = 8$ (1)

Mặt khác $S_{ABC} = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}.\sqrt{29}.h_a$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{2}.\sqrt{29}.h_a = 8 \Rightarrow h_a = \frac{16\sqrt{29}}{29}$

Vậy độ dài đường cao kẻ từ A là $h_a = \frac{16\sqrt{29}}{29}$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính bằng 3, biết $A = 30^0$, $B = 45^0$.

Tính độ dài trung tuyến kẻ từ A và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Lời giải

Ta có $C = 180^0 - A - B = 180^0 - 30^0 - 45^0 = 105^0$

Theo định lí sin ta có $a = 2R\sin A = 2.3.\sin 30^0 = 3$,

$$b = 2R\sin B = 2.3.\sin 45^0 = 6.\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

$$c = 2R\sin C = 2.3.\sin 105^0 \approx 5,796$$

Theo công thức đường trung tuyến ta có

$$m_a^2 = \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4} \approx \frac{2\left(18 + 5,796^2\right) - 9}{4} = 23,547$$

Theo công thức tính diện tích tam giác ta có

$$S_{ABC} = pr = \frac{1}{2}bc\sin A \Rightarrow r = \frac{bc\sin A}{2p} \approx \frac{3\sqrt{2}.5,796\sin 30^0}{3 + 3\sqrt{2} + 5,796} \approx 0,943$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC. Biết

$AB = 3$, $BC = 8$, $\cos AMB = \frac{5\sqrt{13}}{26}$.

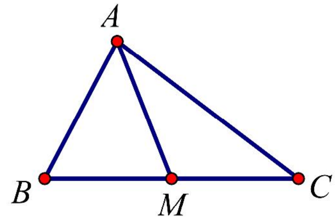
Tính độ dài cạnh AC và góc lớn nhất của tam giác ABC.

Lời giải (hình 2.7)

$BC = 8 \Rightarrow BM = 4$. Đặt $AM = x$

Theo định lí côsin ta có

$$\cos AMB = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM.AB}$$



Hình 2.7

Suy ra $\frac{5\sqrt{13}}{26} = \frac{x^2 + 16 - 9}{2.4.x}$

$$\Leftrightarrow 13x^2 - 20\sqrt{13}x + 91 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{13} \\ x = \frac{7\sqrt{13}}{13} \end{array}\right.$$

Theo công thức tính đường trung tuyến ta có

$$AM^2 = \frac{2\ \ AB^2 + AC^2\ \ - BC^2}{2AB.AC}$$

TH1: Nếu $x = \sqrt{13} \Rightarrow 13 = \frac{2\ \ 3^2 + AC^2\ \ - 8^2}{4} \Rightarrow AC = 7$.

Ta có $BC > AC > AB \Rightarrow$ góc A lớn nhất. Theo định lí côsin ta có

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{9 + 49 - 64}{2.3.7} = -\frac{1}{7}$$

Suy ra $A \approx 98^0 12'$

TH2: Nếu $x = \frac{7\sqrt{13}}{13} \Rightarrow \frac{49}{13} = \frac{2\ \ 3^2 + AC^2\ \ - 8^2}{4} \Rightarrow AC = \sqrt{\frac{397}{13}}$

Ta có $BC > AC > AB \Rightarrow$ góc A lớn nhất. Theo định lí côsin ta có

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{9 + \frac{397}{13} - 64}{2.3.\sqrt{\frac{397}{13}}} = -\frac{53}{\sqrt{5161}}$$

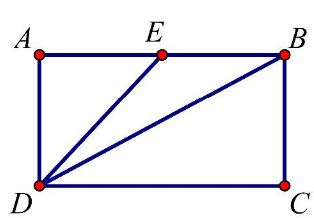
Suy ra $A \approx 137^0 32'$

Ví dụ 4: Cho hình chữ nhật $ABCD$ biết $AD = 1$. Giả sử E là trung điểm AB và thỏa mãn $\sin BDE = \frac{1}{3}$.

Tính độ dài cạnh AB.

Lời giải (hình 2.8)

Đặt $AB = 2x\ \ x > 0\ \Rightarrow AE = EB = x$.



Hình 2.8

Vì góc BDE nhọn nên $\cos BDE > 0$ suy ra

$$\cos BDE = \sqrt{1 - \sin^2 BDE} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Theo định lí Pitago ta có:

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 = 1 + x^2 \Rightarrow DE = \sqrt{1 + x^2}$$

$$BD^2 = DC^2 + BC^2 = 4x^2 + 1 \Rightarrow BD = \sqrt{4x^2 + 1}$$

Áp dụng định lí côsin trong tam giác BDE ta có

$$\cos BDE = \frac{DE^2 + DB^2 - EB^2}{2DE.DB} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4x^2 + 2}{2\sqrt{\ 1 + x^2\ \ \ 4x^2 + 1}}$$

$\Leftrightarrow 4x^4 - 4x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (Do $x > 0$)

Vậy độ dài cạnh AB là $\sqrt{2}$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 2.56: Cho tam giác ABC có đoạn thẳng nối trung điểm AB và BC bằng 3, cạnh $AB = 9$ và $ACB = 60^0$. Tính cạnh BC.

Bài 2.57: Cho tam giác ABC vuông tại B có $AB = 1$. Trên tia đối của AC lấy điểm D sao cho $CD = AB$. Giả sử $CBD = 30^0$. Tính AC.

Bài 2.58. Cho $a = x^2 + x + 1; b = 2x + 1; c = x^2 - 1$. Giả sử a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng tam giác đó có một góc bằng 120^0

Bài 2.59: Cho tam giác ABC có $AB = 3,\ AC = 7,\ BC = 8$.

a) Tính diện tích tam giác ABC

b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác

c) Tính đường đường cao kẻ từ đỉnh A.

Bài 2.60: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{b}{\sqrt{2}} = \dfrac{2c}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$.

a) Tính các góc của tam giác.

b) Cho $a = 2\sqrt{3}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 2.61: Cho tam giác ABC có $A = 60^0,\ a = 10,\ r = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

a) Tính R

b) Tính b, c

Bài 2.62: Cho tam giác ABC có $AB = 10,\ AC = 4$ và $A = 60^0$.

a) Tính chu vi của tam giác

b) Tính $\tan C$

c) Lấy điểm D trên tia đối của tia AB sao cho $AD = 6$ và điểm E trên tia AC sao cho $AE = x$. Tìm x để BE là tiếp tuyến của đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ADE

Bài 2.63. Cho tam giác ABC cân có cạnh bên bằng b và nội tiếp đường tròn (O;R).

a) Tính côsin của các góc tam giác.

b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

c) Với giá trị nào của b thì tam giác có diện tích lớn nhất ?