$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = \dfrac{2+\sqrt{6}}{2} \\ \sqrt{y-1} = \dfrac{2+\sqrt{6}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6+4\sqrt{6}}{4} \\ y = \dfrac{14+4\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$ là nghiệm duy nhất.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi $a = 2+\sqrt{6}$.

Bài 3.66: a) Ta có: $HPT \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 - 3xy = 3(x-y) \\ xy = 2(x-y)^2 \end{cases}$

Đặt $u = x-y, v = xy$. Hệ trở thành $\begin{cases} u^2 - 3u + v = 0 \\ v = 2u^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases}$. hoặc $\begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases}$

Từ đó giải được các nghiệm của hệ là $(0;0)$, $(2;1)$, $(-1;-2)$.

b) $HPT \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y + xy(x^2+y) + xy = -\dfrac{5}{4} \\ (x^2+y)^2 + xy = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$. Đặt $a = x^2 + y; b = xy$

Ta có: $\begin{cases} a + ab + b = -\dfrac{5}{4} \\ a^2 + b = -\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{5}{4} - a^2 \\ a + a(-\dfrac{5}{4} - a^2) - \dfrac{5}{4} - a^2 = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{5}{4} - a^2 \\ a^3 + a^2 + \dfrac{1}{4}a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -\dfrac{5}{4} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$* \begin{cases} a = 0 \\ b = -\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ xy = -\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{\dfrac{5}{4}} \\ y = -\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}} \end{cases}$$

$$* \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y = -\dfrac{1}{2} \\ xy = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ có hai cặp nghiệm $(x;y) = \left(\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}}; -\sqrt[3]{\dfrac{24}{16}}\right), \left(1; -\dfrac{3}{2}\right)$.

Bài 3.67: a) Vì $y = 0$ không thỏa hệ đã cho nên hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y} = 7 \\ x^2 + \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y^2} = 13 \end{cases}$

Đặt $a = x + \dfrac{1}{y};\ b = \dfrac{x}{y} \Rightarrow x^2 + \dfrac{1}{y^2} = a^2 - 2b$.

Ta có hệ là $\begin{cases} a+b=7 \\ a^2-b=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=7 \\ a^2+a-20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=-5 \\ b=12 \end{cases}$.

$* \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=4 \\ \dfrac{x}{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3=0 \\ x=3y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=\dfrac{1}{3} \\ x=3 \Rightarrow y=1 \end{array} \right.$

$* \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=-5 \\ \dfrac{x}{y}=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x+12=0 \\ x=12y \end{cases}$ hệ vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm: $(x;y)=(1;\dfrac{1}{3}),\ (3;1)$.

b) Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của hệ nên ta biến đổi hệ trở thành

$\begin{cases} 2y\dfrac{1}{x^3}(\dfrac{1}{x^3}+2y)=6 \\ \dfrac{1}{x^6}+(2y)^2=5 \end{cases}$. Đặt $a=2y,\ b=\dfrac{1}{x^3}$, ta có hệ

$\begin{cases} ab(a+b)=6 \\ a^2+b^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{6}{ab} \\ (a+b)^2-2ab=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{6}{ab} \\ 2a^3b^3+5a^2b^2-36=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ab=2 \\ a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$ v $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$.

$* \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$. $* \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases}$.

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm : $(x;y)=(1;1),\ (\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}};\dfrac{1}{2})$.

c) Nếu $x=0$ thay vào hệ $\Rightarrow y=0 \Rightarrow x=y=0$ là một nghiệm của hệ

Với $x \neq 0$ ta có hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{y}{x}=2y-1 \\ x^2+\dfrac{y^2}{x^2}=4y-3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{y}{x}=2y-1 \\ (x+\dfrac{y}{x})^2=6y-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{y}{x}=2y-1 & (1) \\ (2y-1)^2=6y-3 & (2) \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow 2y^2 - 5y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2; y = \frac{1}{2}$.

* $y = 2 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x + \frac{2}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = 2$.

* $y = \frac{1}{2} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x + \frac{1}{2x} = 0$ phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có ba cặp nghiệm: $(x;y) = (0;0),\ (1;2),\ (2;2)$.

Bài 3.68: a) Nhân phương trình thứ hai của hệ với 3 và cộng hai phương trình theo vế ta có

$$x^3 + 3x^2 + 3y^2(x+1) - 24xy = 6xy + 30y - 78x - 76$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 2x + 76) + 3y^2(x+1) - 30y(x+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 2x + 3y^2 - 30y + 76) = 0 \quad (*)$$

Do $x^2 + 2x + 3y^2 - 30y + 76 = (x+1)^2 + 3(y-5)^2 \geq 0$ và không có đẳng thức xảy ra nên (*) tương đương với $x = -1$. Thay vào hệ ta tìm được $y = -3, y = 5$.

b) Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$(6x^2 - 12x + 8) + (9y^2 + 12y + 27) = 35$$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được:

$$x^3 - y^3 = (6x^2 - 12x + 8) + (9y^2 + 12y + 27) \Leftrightarrow (x-2)^3 = (y+3)^3 \Leftrightarrow x = y + 5$$

Lại thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được:

$$2(y+5)^2 + 3y^2 = 4(y+5) - 9y \Leftrightarrow 5y^2 + 25y + 30 = 0.$$
$$\Leftrightarrow (y+2)(y+3) = 0 \Leftrightarrow y = -2 \vee y = -3$$

Với $y = -2$, ta có $x = 3$, với $y = -3$, ta có $x = 2$.

Thử lại ta thấy thỏa.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x,y) = (-2,3), (-3,2)$.

Bài 3.69: Điều kiện: $\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x + y \neq 0 \end{cases}$

Ta thấy $x = 0\ (y = 0)$ không là nghiệm của hệ nên hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{2\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x+y} = \frac{2}{\sqrt[4]{x}} \\ \frac{1}{4} - \frac{2\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x+y} = \frac{1}{\sqrt[4]{y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\frac{2\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x+y} = \frac{2}{\sqrt[4]{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{y}} \\ \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{y}} \end{cases}$$

Suy ra $\frac{2\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x+y} = \left(\frac{2}{\sqrt[4]{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{y}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{y}}\right) = \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x} - 2x\sqrt{y} + 2y\sqrt{x} - 4y\sqrt{y} = 0.$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x}{y}}$ ta có: $t^3 - 2t^2 + 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x = 4y$

Từ đó ta tìm được $\begin{cases} x = \dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)^4}{4} \\ y = \dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)^4}{16} \end{cases}$.

Bài 3.70: a) Đặt: $u = \sqrt[3]{3x+1}$ và $v = \sqrt[3]{3x-1}$

(6) trở thành: $\begin{cases} u^2 + v^2 + u.v = 1 \\ u^3 - v^3 = 2 \end{cases} \Rightarrow u - v = 2 \Rightarrow u = v + 2$

Do đó: $\left(v+2\right)^2 + v^2 + v\left(v+2\right) = 1$

$\Leftrightarrow 3v^2 + 6v + 3 = 0 \Leftrightarrow 3\left(v+1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow v = -1 \Rightarrow u = 1$

Vậy ta có: $\begin{cases} u = \sqrt[3]{3x+1} = 1 \\ v = \sqrt[3]{3x-1} = -1 \end{cases} \Rightarrow x = 0$

b) ĐKXĐ: $0 \le x \le 2$.

Đặt $a = \sqrt[4]{\mathrm{x}};\ b = \sqrt[4]{17-x};\ a,b \ge 0$. Ta có hệ phương trình

$\begin{cases} a + b = 3 \\ a^4 + b^4 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ [(a+b)^2 - 2ab]^2 - 2a^2b^2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ a^2b^2 - 18ab + 32 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 2 \ V \ ab = 16 \end{cases}$.

- Với $\begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \text{V} \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 16 \end{array}\right.$.
- Với $\begin{cases} a + b = 2 \\ ab = 16 \end{cases} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.Vậy phương trình đã cho có hai ngiệm $x = 1; x = 16$.

Bài 3.71: a) ĐKXĐ: $x \ge -3$.

Phương trình $\Leftrightarrow 2(x+1)^2 - 2 = \sqrt{\dfrac{(x+1)+2}{2}} \Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x+1}{2} + 1}$.

Đặt $t = x + 1; y = \sqrt{\dfrac{x+1}{2} + 1} = \sqrt{\dfrac{t}{2} + 1} \Rightarrow y^2 - 1 = \dfrac{t}{2}$, ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} t^2 - 1 = \dfrac{1}{2}y \\ y^2 - 1 = \dfrac{1}{2}t \end{cases} \Rightarrow (t-y)(t+y+\dfrac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = y \\ y = -t - \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

* $t = y \Leftrightarrow t^2 - 1 = \dfrac{t}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$ (thỏa đk $x \ge -3$)

*

$y=-t-\dfrac{1}{2}\Rightarrow (t+\dfrac{1}{2})^2-1=\dfrac{t}{2}\Leftrightarrow 4t^2+2t-3=0\Leftrightarrow t=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{4}$ (thỏa đk $x\ge -3$).

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm: $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{4}; x=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{4}$.

b) ĐKXĐ: $x\ge 2$

Phương trình $\Leftrightarrow (2x+1)^2+3x=2\sqrt{2(2x+1)-3x}$

Đặt $t=2x+1; y=\sqrt{2t-3x}\Rightarrow y^2+3x=2t\Rightarrow$ ta có hệ phương trình

$\begin{cases} t^2+3x=2y \\ y^2+3x=2t \end{cases}\Rightarrow (t-y)(t+y+2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=t \\ y=-t-2 \end{array}\right.$.

* $y=t\Leftrightarrow t^2-2t+3x=0\Leftrightarrow 4x^2+3x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$.

* $y=-t-2\Rightarrow t^2+3x+2(t+2)=0\Leftrightarrow 4x^2+11x+7=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-\dfrac{7}{4} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm: $x=-1; x=-\dfrac{7}{4}; x=\dfrac{1}{4}$.

Cách khác : $pt\Leftrightarrow 4x^2+8x+4=\left(\sqrt{x+2}+1\right)^2$

c) Ta có phương trình $\Leftrightarrow \sqrt[3]{3x-5}=(2x-3)^3-x+2$

Đặt $\sqrt[3]{3x-5}=2y-3\Rightarrow (2y-3)^3=3x-5$, khi đó ta có hệ phương trình

$\begin{cases} (2x-3)^3=2y-3+x-2 \\ (2y-3)^3=2x-3+x-2 \end{cases}\Rightarrow a^3-b^3=b-a$ (Với $a=2x-3; b=2y-3$)

$\Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2+1)=0\Leftrightarrow a=b\Leftrightarrow (2x-3)^3=3x-5$

$\Leftrightarrow 8x^3-36x^2+51x-22=0\Leftrightarrow (x-2)(8x^2-20x+11)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{3}}{4} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $x=2; x=\dfrac{5\pm\sqrt{3}}{4}$.

Bài 3.72: a) ĐK: $0\le x\le\sqrt{2}$.

Đặt $a=\sqrt{x}; b=2-\sqrt{x}$, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a+b=2 \\ a^4+b^4=2 \end{cases}$ (I)

(I) $\Leftrightarrow a=b=1\Leftrightarrow x=1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

b) ĐKXĐ: $x\le\sqrt[3]{2}$

Đặt $a = \sqrt[3]{2 - x^2},\ a \ge 0 \Rightarrow a^3 = 2 - x^2 \Leftrightarrow a^3 + x^2 = 2$

Mặt khác từ phương trình ban đầu $\Rightarrow a = \sqrt{2 - x^3} \Leftrightarrow x^3 + a^2 = 2$

Vậy ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a^3 + x^2 = 2 \\ x^3 + a^2 = 2 \end{cases}$ trừ hai phương trình của hệ ta được

$a^3 - x^3 - (a^2 - x^2) = 0 \Leftrightarrow (a - x)(a^2 + ax + x^2 - a - x) = 0$ (*)

Ta có: $a^2 + ax + x^2 - a - x = a^2 + (a + x)(x - 1)$

* Với $x \ge 1 \Rightarrow a + x > 0 \Rightarrow (a + x)(x - 1) \ge 0 \Rightarrow a^2 + (a + x)(x - 1) > 0$

* Với $0 \le x < 1 \Rightarrow a \ge 1 \Rightarrow a^2 + ax + x^2 - a - x = a(a - 1) + ax + x(a - 1) > 0$

* Với $x < 0 \Rightarrow a + x < 0 \Rightarrow (a + x)(x - 1) > 0 \Rightarrow a^2 + (a + x)(x - 1) > 0$

$\Rightarrow a^2 + ax + x^2 - a - x > 0 \ \ \forall x$

Do đo $(*) \Leftrightarrow a = x$ thay vào hệ ta được:

$\sqrt{2 - x^3} = x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le \sqrt[3]{2} \\ x^3 + x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 3.73: Đặt $y = 4x^3 - x + 3$. (1) có dạng: $\begin{cases} 2y^3 - 2x^3 = 3 \\ 4x^3 - x + 3 = y \end{cases} (I)$ (I)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^3 - 2x^3 = 3 \\ 2x^3 + 2y^3 - (x + y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^3 - 2x^3 = 3(2) \\ (x + y)(2x^2 - 2xy + 2y^2 - 1) = 0(3) \end{cases}$

TH1: $y = -x$ kết hợp(2), có nghiệm của (1): $x = -\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

TH2: $2x^2 - 2xy + 2y^2 - 1 = 0; \Delta'_x = 2 - 3y^2$. Nếu có nghiệm thì $|y| \le \sqrt{\frac{2}{3}}$. Tương tự

cũng có $|x| \le \sqrt{\frac{2}{3}}$. Khi đó VT (2) $\le 4\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} < 3$. Chứng tỏ TH2 vô nghiệm.

KL (1) có 1 nghiệm $x = -\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

Bài 3.74: a) Dễ thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

Xét $x \ne 0$ phương trình tương đương với $\ x - 1\ ^3 + x + 1 = x^2\sqrt[3]{x^2(x - 1) - x - 1}$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[3]{x^2(x - 1) - x - 1} \\ v = x - 1 \end{cases} \Rightarrow u^3 + x + 1 = x^2v$

Phương trình trở thành $v^3 + x + 1 = x^2v$

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} u^3 + x + 1 = x^2v \\ v^3 + x + 1 = x^2v \end{cases}$

$\Rightarrow u^3 - v^3 = x^2 \quad v - u \quad \Leftrightarrow \quad u - v \quad u^2 + uv + v^2 + x^2 \quad = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x^2 = 0 \end{array}\right.$

Với $u = v$ ta có $\quad x - 1 \ ^3 + x + 1 = x^2 \quad x - 1 \quad \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$ (loại

$x = 0$)

Với $u^2 + uv + v^2 + x^2 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \dfrac{v}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}v^2 + x^2 = 0 \Leftrightarrow u = v = x = 0$ (loại)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 2$.

b) Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt[3]{3x+4} + 2x + 3 = (x+1)^3$

Đặt $y+1 = \sqrt[3]{3x+4}$. Ta có hệ phương trình $\begin{cases} (x+1)^3 = 2x + y + 4 \\ (y+1)^3 = 3x + 4 \end{cases}$

Trừ hai phương trình của hệ, vế theo vế, ta được

$(x-y)\left[(x-1)^2 + (x-1)(y-1) + (y-1)^2\right] = y - x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 0 \\ (x-1)^2 + (x-1)(y-1) + (y-1)^2 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y$

Suy ra

$x + 1 = \sqrt[3]{3x+4} \Leftrightarrow (x+1)^3 = 3x + 4 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 = 4 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$.

Thử lại ta thấy thỏa.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là $x = 1, x = -2$.