

**Bài 4.31:** Ta có  $\sqrt{a^2 + 1} = \sqrt{a + 1 - \sqrt{2a}} \sqrt{a + 1 + \sqrt{2a}}$   
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \frac{a + 1 - \sqrt{2a}}{2 - \sqrt{2}} \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \frac{a + 1 + \sqrt{2a}}{2}}$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\sqrt{a^2 + 1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \frac{a + 1 - \sqrt{2a}}{2 - \sqrt{2}} + \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \frac{a + 1 + \sqrt{2a}}{2} = \sqrt{2} a - \sqrt{a} + 1$$

Tương tự ta có  $\sqrt{b^2 + 1} \leq \sqrt{2} b - \sqrt{b} + 1$ ,  $\sqrt{c^2 + 1} \leq \sqrt{2} c - \sqrt{c} + 1$

Cộng về với về các BĐT ta có

$$\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1} \leq \sqrt{2} a + b + c - \sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c} + 3 \quad (1)$$

Mặt khác theo BĐT côsi ta có  $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{abc}} \geq 1 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra  $\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1} \leq \sqrt{2} a + b + c$

**Bài 4.32:** a) BĐT  $\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + 2\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right) \geq 3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a}$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geq 3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c}$$

Áp dụng BDT côsi ta có có:

$$\frac{a^2}{b^2} + 1 \geq \frac{2a}{b}; \frac{b^2}{c^2} + 1 \geq \frac{2b}{c}; \frac{c^2}{a^2} + 1 \geq \frac{2c}{a}; \frac{a}{c} + 1 \geq \frac{2a}{c}; \frac{b}{a} + 1 \geq \frac{2b}{a}; \frac{c}{b} + 1 \geq \frac{2c}{b}$$

Mặt khác  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} \geq 6$

Cộng các về các BĐT lại ta có ĐPCM.

b) Ta có  $\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + b + c}} = \sqrt{\frac{1}{1 + x^3}}$  với  $x = \frac{b + c}{a}$

Áp dụng BDT côsi ta có

$$\sqrt{\frac{1}{1 + x^3}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x\sqrt{x^2 - x + 1}}} \geq \frac{2}{x^2 + 2} = \frac{2}{\left(\frac{b + c}{a}\right)^2 + 1} = \frac{2a^2}{b + c^2 + 2a^2}$$

Mặt khác ta có  $b + c^2 \leq 2b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{2a^2}{b + c^2 + 2a^2} \geq \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

Do đó ta có 
$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + b + c}} \geq \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Tương tự ta có 
$$\sqrt{\frac{b^3}{b^3 + c + a}} \geq \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + a + b}} \geq \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được điều phải chứng minh.

**Bài 4.33:** Không mất tính tổng quát giả sử  $(1-x)(1-y) \geq 0 \Leftrightarrow x+y-xy \leq 1$

Suy ra  $z(x+y-xy) \leq z \Rightarrow xy+yz+zx-xyz \leq xy+z$

Mặt khác, theo BĐT côsi ta có  $xy = \sqrt[3]{x^3 \cdot y^3 \cdot 1} \leq \frac{x^3 + y^3 + 1}{3}; z = \sqrt[3]{z^3 \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{z^3 + 1 + 1}{3}$ .

Suy ra  $xy + z \leq \frac{x^3 + y^3 + z^3 + 3}{3} = 2$  ĐPCM.

**Bài 4.34:** Phân tích: Do vai trò của  $x, y$  bình đẳng nên ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi  $x = y$ . Vì vậy ta cần chọn các số dương  $m, n$  sao cho khi đánh giá xuất hiện biểu thức  $S = x + y + 2z$ .

Ta có:  $x^2 + m^2 \geq 2mx, y^2 + m^2 \geq 2my, z^2 + n^2 \geq 2nz$

Do đó ta cần chọn  $m, n$  thỏa mãn  $x = y = m, z = n, n = 2m$  và  $x^2 + y^2 + z^2 = 18$

Suy ra  $m = \sqrt{3}, n = 2\sqrt{3}$ . Ta có lời giải như sau

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$x^2 + 3 \geq 2\sqrt{3}x, y^2 + 3 \geq 2\sqrt{3}y, z^2 + 12 \geq 4\sqrt{3}z$$

Suy ra  $x^2 + y^2 + z^2 + 18 \geq 2\sqrt{3}(x + y + 2z) \Leftrightarrow x + y + 2z \leq 6\sqrt{3}$

Do đó  $\min S = 6\sqrt{3} \Leftrightarrow x = y = \sqrt{3}, z = 2\sqrt{3}$

**Bài 4.35:** Áp dụng BĐT côsi ta có  $a^3 + m^3 + m^3 \geq 3m^2a, c^3 + m^3 + m^3 \geq 3m^2c$

$$64b^3 + n^3 + n^3 \geq 12n^2b \quad (m, n \text{ dương})$$

Do đó ta cần chọn tham số  $m, n$  sao cho  $3m^2 = 12n^2, a = c = m, 4b = n$  và  $a + b + c = 3$

Từ đó ta tìm được  $m = \frac{24}{17}, n = \frac{12}{17}$ . Ta dễ dàng có được lời giải bài toán.

**Bài 4.36:** Ta đưa vào tham số và đánh giá như sau

---

$$\frac{x^2}{2} + my^2 \geq 2\sqrt{\frac{m}{2}}xy; \quad \frac{x^2}{2} + nz^2 \geq 2\sqrt{\frac{n}{2}}xz; \quad 2 - m \ y^2 + 3 - n \ z^2 \geq 2\sqrt{2 - m \ 3 - n} \ yz$$

Cần cho m, n sao cho  $\sqrt{2 - m \ 3 - n} = \sqrt{\frac{m}{2}} = \sqrt{\frac{n}{2}} \ (0 < m, n \leq 2)$

Ta có  $m = n = \frac{3}{2}$

Chú ý: đối với bài toán tổng quát, Tìm GTNN của  $P = mx^2 + ny^2 + pz^2$  ta đưa về

$P = m \left( x^2 + \frac{n}{m} y^2 + \frac{p}{m} z^2 \right)$  và là tương tự như trên.

**Bài 4.37:** Đặt  $P = a^3 + 2b^3 + 3c^3$

Với các số thực dương  $\alpha, \beta, \gamma$  chọn sau ta có

$$2P = (a^3 + a^3 + a^3) + 2(b^3 + b^3 + \beta^3) + 3(c^3 + c^3 + \gamma^3) - (\alpha^3 + 2\beta^3 + 3\gamma^3) \\ \geq 3\alpha a^2 + 6\beta b^2 + 9\gamma c^2 - (\alpha^3 + 2\beta^3 + 3\gamma^3)$$

Cần chọn  $\alpha = 2\beta = 3\gamma = t$  và kết hợp với dấu đẳng thức xảy ra khi

$a = \alpha, b = \beta, c = \gamma, a^2 + b^2 + c^2 = 1$  ta được  $\alpha = \frac{6}{7}, \beta = \frac{6}{14}, \gamma = \frac{6}{21}$

Vậy  $2P \geq 3 \cdot \frac{6}{7}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{6}{7} \Rightarrow P \geq \frac{6}{7}$

**Bài 4.38:** Áp dụng BĐT côsi ta có  $x + \frac{1}{2}\sqrt{x \cdot 4y} + \frac{1}{4}\sqrt[3]{x \cdot 4y \cdot 16z} \leq \frac{4}{3}(x + y + z)$

**Bài 4.38:** Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a^2}{b+c} + \frac{4}{9}(b+c) \geq \frac{4}{3}a \\ \frac{b^2}{c+a} + \frac{4}{9}(a+c) \geq \frac{4}{3}b \\ \frac{16c^2}{a+b} + (a+b) \geq 8c \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{16c^2}{a+b} \geq \frac{1}{9}(64c - a - b)$$

**Bài 4.39:**  $y^2 + yz + z^2 = 1 - \frac{3x^2}{2}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2\right) + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}z^2\right) + yz + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = 1.$$

Ta có  $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \geq xy, \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}z^2 \geq yz$

Suy ra  $\frac{1}{2}(x+y+z)^2 \leq 1 \Leftrightarrow |P| \leq \sqrt{2}$ .

**Bài 4.40:** Ta có:  $\frac{x^2}{x+y} = \frac{x(x+y) - xy}{x+y} = x - \frac{xy}{x+y} \geq x - \frac{\sqrt{xy}}{2}$

Chứng minh tương tự:  $\frac{y^2}{y+z} \geq y - \frac{\sqrt{yz}}{2}$ ;  $\frac{z^2}{z+x} \geq z - \frac{\sqrt{zx}}{2}$

Suy ra:  $T \geq x+y+z - \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}}{2} = x+y+z - \frac{1}{2} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(vì  $x+y+z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$ )

Vậy  $\min T = \frac{1}{2}$  khi  $x=y=z = \frac{1}{3}$ .

**Bài 4.41:** Theo BĐT côsi ta có

$A = x+y+z - \left( \frac{xy^2}{x+y^2} + \frac{yz^2}{y+z^2} + \frac{zx^2}{z+x^2} \right) \geq 3 - \frac{1}{2}(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx})$

Lại có  $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \leq \frac{1}{2}[(x+1)y + (y+1)z + (z+1)x] = \frac{1}{2}(x+y+z+xy+yz+zx)$

$\leq \frac{1}{2}(3 + \frac{1}{3}(x+y+z)^2) = 3$

$\Rightarrow A \geq \frac{3}{2}$ . Đẳng thức xảy ra khi  $x=y=z=1$

Vậy  $\min A = \frac{3}{2}$

**Bài 4.42:** Đặt  $a = y+z, b = z+x, c = x+y$  ( với a,b,c dương)

$\Rightarrow x = \frac{b+c-a}{2}, y = \frac{c+a-b}{2}, z = \frac{a+b-c}{2}$

$2VT = \frac{25}{a} \frac{b+c-a}{2} + \frac{4}{b} \frac{c+a-b}{2} + \frac{9}{c} \frac{a+b-c}{2} = \left( \frac{25b}{a} + \frac{4a}{b} \right) + \left( \frac{25c}{a} + \frac{9a}{c} \right) + \left( \frac{4c}{b} + \frac{9b}{c} \right) - 38$

$\geq 20 + 30 + 12 = 62 \Rightarrow VT \geq 31$

Đấu bằng xảy ra khi  $\begin{cases} 25b^2 = 4a^2 \\ 25c^2 = 9a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b = 2a \\ 5c = 3a \end{cases} \Rightarrow 5b + 5c = 5a \Rightarrow x = 0$  (vô lí)

**Bài 4.43:** Đặt  $x = a+b+2c, y = 2a+b+c, z = a+b+3c$

Suy ra  $a = -2x + y + z, b = 5x - y - 3z, c = z - x$

Bất phương trình trở thành  $\frac{-8x + 4y + 4z}{x} + \frac{2x - y}{y} - \frac{-8x + 8z}{z} \geq 12\sqrt{2} - 17$

$$\Leftrightarrow +\left(\frac{4y}{x} + \frac{2x}{y}\right) + \left(\frac{4z}{x} + \frac{8x}{z}\right) \geq 12\sqrt{2} \quad (*)$$

Áp dụng BĐT côsi ta có  $\frac{4y}{x} + \frac{2x}{y} \geq 4\sqrt{2}$ ,  $\frac{4z}{x} + \frac{8x}{z} \geq 8\sqrt{2}$

Cộng vế với vế lại suy ra BĐT (\*) đúng. ĐPCM.

**Bài 4.44:** Áp dụng BĐT Côsi ta có

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow \frac{x + y + z}{27} \geq xyz$$

Mặt khác  $xyz \geq x + y + z$  suy ra  $\frac{x + y + z}{27} \geq x + y + z + 2$

Đặt  $t = x + y + z, t > 0$  ta có  $\frac{t^3}{27} \geq t + 2 \Leftrightarrow t^3 - 27t - 54 \geq 0 \Leftrightarrow t - 6 \quad t + 3^2 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 6$

Suy ra  $x + y + z \geq 6$ , đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = z = 2$ .

**Bài 4.45:** Sử dụng bất đẳng thức côsi ta có  $\frac{a^{11}}{bc} + abc \geq 2\sqrt{\frac{a^{11}}{bc} \cdot abc} = 2a^6$

Tương tự ta có  $\frac{b^{11}}{ca} + abc \geq 2b^6$ ,  $\frac{c^{11}}{ab} + abc \geq 2c^6$

Từ đó suy ra  $\frac{a^{11}}{bc} + \frac{b^{11}}{ca} + \frac{c^{11}}{ab} \geq 2(a^6 + b^6 + c^6) - 3abc$

Vậy ta chỉ cần chứng minh  $2(a^6 + b^6 + c^6) - 3abc + \frac{3}{a^2b^2c^2} \geq \frac{a^6 + b^6 + c^6 + 9}{2}$

Hay là  $3(a^6 + b^6 + c^6) + \frac{6}{a^2b^2c^2} - 6abc \geq 9$

Bây giờ lại sử dụng bất đẳng thức côsi ta được  $a^6 + b^6 + c^6 \geq 3a^2b^2c^2$

Do đó ta chỉ cần chứng minh  $9a^2b^2c^2 + \frac{6}{a^2b^2c^2} - 6abc \geq 9$

Đặt  $t = abc, t > 0$ . BĐT trở thành  $9t^2 + \frac{6}{t^2} - 6t \geq 9$

Sử dụng bất đẳng thức côsi ta được

$$9t^2 + \frac{6}{t^2} - 6t \geq 9t^2 + \frac{6}{t^2} - 3(t^2 + 1) = 6t^2 + \frac{6}{t^2} - 3 \geq 12 - 3 = 9 \quad \text{ĐPCM.}$$



Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$

**Bài 4.46:** Từ điều kiện suy ra  $x, y, z \in [0; 2]$ . Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$$27(2-x)(2-y)(2-z) \leq 2-x+2-y+2-z^3$$

$$\Leftrightarrow 27[8-4x+y+z+2xy+yz+zx-xyz] \leq 8-x-y-z^3$$

$$\Leftrightarrow 27[8-4x+y+z+2xy+yz+zx+x^2+y^2+z^2-4] \leq 8-x-y-z^3$$

$$\Leftrightarrow 27[4-4x+y+z+x+y+z^2] \leq 8-x-y-z^3$$

Đặt  $t = x + y + z, t \geq 0$  ta có

$$\Leftrightarrow 27(t^2 - 4t + 4) \leq 6 - t^3 \Leftrightarrow t^3 + 9t^2 - 108 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow t - 3 \quad t + 6^2 \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 3$$

Suy ra  $x + y + z \leq 3$ .

**Bài 4.47:** Giả thiết của bài toán và P là những đa thức đối xứng ba biến nên ta biểu diễn các đa thức này qua ba đa thức đối xứng cơ bản  $x + y + z, xy + yz + zx, xyz$ .

Ta có:  $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2$

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ . Suy ra:

$$|P| = \left| (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \right| = \left| (x + y + z) \left( 2 - \frac{(x + y + z)^2 - 2}{2} \right) \right|$$

Đặt  $t = |x + y + z|, t \geq 0$  suy ra  $|P| = t \left( 2 - \frac{t^2 - 2}{2} \right) = -\frac{t^3}{2} + 3t$ .

Ta sẽ đi chứng minh  $-\frac{t^3}{2} + 3t \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow t^3 + 4\sqrt{2} \geq 6t$

Thật vậy theo BĐT côsi ta có  $t^3 + 4\sqrt{2} = t^3 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \geq 3\sqrt{t^3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = 6t$

Do đó  $|P| \leq 2\sqrt{2}$ . Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $t = \sqrt{2}$ .

Ta có  $P = 2\sqrt{2}$  chẳng hạn khi  $x = \sqrt{2}, y = z = 0$ ,  $P = -2\sqrt{2}$  chẳng hạn khi  $x = -\sqrt{2}, y = z = 0$ ,

Vậy  $\min P = -2\sqrt{2}, \max P = 2\sqrt{2}$ .

**Nhận xét :**

1) Việc chúng biết phải đi chứng minh  $-\frac{t^3}{2} + 3t \leq 2\sqrt{2}$  là do chúng ta dự đoán được dấu bằng xảy ra tại biên.

2) Ta có mọi đa thức đối xứng ba ẩn luôn biểu diễn qua được các đa thức đối xứng sơ cấp  $a = x + y + z; b = xy + yz + zx; c = xyz$ . Hơn nữa giữa ba đa thức đối xứng sơ cấp này luôn có sự

**Truy cập website: [hoc360.net](http://hoc360.net) để tải tài liệu đề thi miễn phí**

---

đánh giá qua lại giữa chúng, cụ thể  $a^2 \geq 3b \geq 9\sqrt[3]{c^2}$ . Với bài toán trên từ giả thiết ta có:

$$a^2 - 2b = 2 \Leftrightarrow b = \frac{a^2 - 2}{2} \text{ tức là ta đã thay thế } b \text{ bởi } a \text{ do đó khi biểu diễn } P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

thì chỉ còn hai biến là a và c. Mặt khác ta luôn đánh giá được c qua a (hoặc a qua c) và lúc đó trong P chỉ còn một biến là a hoặc c.

**Bài 4.48:** Ta có  $xyz = (1-x)(1-y)(1-z) \Leftrightarrow 1 - x + y + z + xy + yz + zx = 2xyz$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2 - 2x + y + z + x + y + z^2 - 4xyz$$

Áp dụng BĐT côsi ta có  $\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \geq xyz$  nên

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2 - 2x + y + z + x + y + z^2 - 4\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$$

Đặt  $t = x + y + z$  thì  $0 < t < 3$ . Khi đó:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq -\frac{4}{27}t^3 + t^2 - 2t + 2 = \frac{1}{27}(2t-3)^2\left(\frac{15}{4}-t\right) + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi  $t = \frac{3}{2}$  hay  $x = y = z = \frac{1}{2}$ . ĐPCM

Cho  $x, y \in R$  và  $x, y > 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P = \frac{x^3 + y^3 - x^2 + y^2}{(x-1)(y-1)}$ .

Đặt  $t = x + y$ ;  $t > 2$ . ta có  $xy \leq \frac{t^2}{4}$ .

$$P = \frac{t^3 - t^2 - xy(3t-2)}{xy - t + 1}. \text{ Do } 3t - 2 > 0 \text{ và } -xy \geq -\frac{t^2}{4} \text{ nên ta có}$$

$$P \geq \frac{t^3 - t^2 - \frac{t^2(3t-2)}{4}}{\frac{t^2}{4} - t + 1} = \frac{t^2}{t-2} = t - 2 + \frac{4}{t-2} + 4 \geq 8$$

$$\min P = \min_{(2;+\infty)} f(t) = f(4) = 8 \text{ đạt được khi } \begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}.$$

**Bài 4.49:** Áp dụng BĐT côsi ta có

$$P \geq \frac{6(2x^2 + 13y^2 - xy) - 6xy}{(x+2y)^2} = 6 \cdot \frac{2x^2 + 13y^2 - 2xy}{(x+2y)^2} = 6.Q$$

Rõ ràng  $y \neq 0$  ta có  $Q = \frac{2t^2 - 2t + 13}{t + 2^2}$ ,  $t = \frac{x}{y}$

Xét  $Q - 1 = \frac{t - 3^2}{t + 2^2} \geq 0 \Rightarrow Q \geq 1 \Rightarrow P \geq 6$

Suy ra  $\min P = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3\sqrt{\frac{3}{28}} \\ y = \pm \sqrt{\frac{3}{28}} \end{cases}$ .

Cho  $a, b, c$  là ba số thực không âm có tổng bằng 3. Chứng minh:  $a + ab + 2abc \leq \frac{9}{2}$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng  $xy \leq \frac{x - y^2}{4}$  ta có

$$b + 2abc = 2a.b \left( c + \frac{1}{2} \right) \leq 2a \cdot \frac{\left( b + c + \frac{1}{2} \right)^2}{4} = 2a \cdot \frac{\left( 3 - a + \frac{1}{2} \right)^2}{4} = \frac{a(7 - 2a)^2}{8}$$

Do đó, chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$a + \frac{a(7 - 2a)^2}{8} \leq \frac{9}{2} \Leftrightarrow (4 - a)(2a - 3)^2 \geq 0 \text{ (Luôn đúng với } 0 \leq a \leq 3 \text{)}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $(a, b, c) = \left( \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2} \right)$

**Bài 4.50:** Bình phương 2 vế ta được:  $(1) \Leftrightarrow \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} \geq ab + xy$  (\*)

• Nếu  $ab + xy < 0$  thì (\*) hiển nhiên đúng.

• Nếu  $ab + xy \geq 0$  thì bình phương 2 vế ta được:  $(*) \Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0$  (đúng).

a) Sử dụng (1). Ta có:  $\sqrt{1 + a^2} + \sqrt{1 + b^2} \geq \sqrt{(1 + 1)^2 + (a + b)^2} = \sqrt{5}$ .

b) Sử dụng (1).  $P \geq \sqrt{(a + b)^2 + \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2} \geq \sqrt{(a + b)^2 + \left( \frac{4}{a + b} \right)^2} = \sqrt{17}$

Chú ý:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a + b}$  (với  $a, b > 0$ ).

c) Áp dụng (1) liên tiếp hai lần ta được:

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{(x + y + z)^2 + \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^2}$$



$$\geq \sqrt{(x+y+z)^2 + \left(\frac{9}{x+y+z}\right)^2} = \sqrt{82}.$$

Chú ý:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$  (với  $x, y, z > 0$ ).

d) Tương tự câu c). Ta có:  $P \geq \sqrt{3\sqrt{223}^2 + (x+y+z)^2} = \sqrt{2010}$ .

**Bài 4.51:** a) Áp dụng (1) ba lần ta được:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ ;  $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{4}{b+c}$ ;  $\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \geq \frac{4}{c+a}$ .

Cộng các BĐT về theo về ta được đpcm.

b) Tương tự câu a).

c) Áp dụng a) và b) ta được:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 4 \left( \frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c} \right)$ .

d) Theo (1):  $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \Leftrightarrow \frac{ab}{a+b} \leq \frac{1}{4}(a+b)$ .

Cùng với các BĐT tương tự, cộng về theo về ta được đpcm.

e) Áp dụng câu d) với  $a = x$ ,  $b = 2y$ ,  $c = 4z$  thì  $a+b+c = 12 \Rightarrow$  đpcm.

f) Nhận xét:  $p-a + p-b = 2p - a + b = c$ .

Áp dụng (1) ta được:  $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{(p-a) + (p-b)} = \frac{4}{c}$ .

Cùng với 2 BĐT tương tự, cộng về theo về, ta được đpcm.

**Bài 4.52:** Ta có: (1)  $\Leftrightarrow (a+b+c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$ . Dễ dàng suy từ BĐT Cô-si.

a) Áp dụng (1) ta được:  $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$ .

$$\Rightarrow VT \geq \frac{9(a^2 + b^2 + c^2)}{2(a+b+c)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a+b+c} \geq \frac{3}{2}(a+b+c)$$

Chú ý:  $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ .

b) Để áp dụng (1), ta biến đổi P như sau:

$$P = \frac{x+1-1}{x+1} + \frac{y+1-1}{y+1} + \frac{z+1-1}{z+1} = 3 - \left( \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right)$$

Ta có:  $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \geq \frac{9}{x+y+z+3} = \frac{9}{4}$ . Suy ra:  $P \leq 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$ .

c) Ta có:  $P \geq \frac{9}{a^2 + 2bc + b^2 + 2ca + c^2 + 2ab} = \frac{9}{(a+b+c)^2} \geq 9$ .

d) Ta có

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab + bc + ca} + \frac{1}{ab + bc + ca} \geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + bc + ca} = \frac{9}{(a + b + c)^2} \geq 1$$

và  $3ab + bc + ca \leq (a + b + c)^2$  nên  $\frac{2007}{ab + bc + ca} \geq \frac{3 \cdot 2007}{(a + b + c)^2} \geq 669$ .

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$

**Bài 4.53:** Ta có :  $a^5 + b^5 \geq a^3b^2 + b^3a^2 = a^2b^2(a + b) \Rightarrow a^5 + b^5 + ab \geq ab \frac{a + b + c}{c}$

$$\Rightarrow \frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} \leq \frac{ab}{ab \frac{a + b + c}{c}} = \frac{c}{a + b + c}.$$

Tương tự :  $\frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} \leq \frac{a}{a + b + c}$ ;  $\frac{ca}{c^5 + a^5 + ac} \leq \frac{b}{a + b + c}$

Cộng ba BĐT này lại với nhau ta có đpcm.

**Bài 4.54:** \* Trước tiên, ta sẽ chứng minh kết quả sau:  $\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}$  (1)

Nhân hai vế của (1) với  $ab + bc + ca$ , và để ý rằng

$$\frac{a}{b + c} \cdot (ab + bc + ca) = \frac{a}{b + c} [a(b + c) + bc] = a^2 + \frac{abc}{b + c}$$

Để thấy khi đó, (1) trở thành

$$a^2 + \frac{abc}{b + c} + b^2 + \frac{abc}{c + a} + c^2 + \frac{abc}{a + b} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Hay  $abc \left( \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} + \frac{1}{a + b} \right) \geq 0$  (hiển nhiên đúng). Điều phải chứng minh.

\* Quay trở lại bài toán, sử dụng kết quả trên, ta suy ra

$$P \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}} = t^2 + \frac{4\sqrt{2}}{t}, \text{ với } t = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}}$$

Với cách đặt trên, dễ dàng suy ra  $t \geq 1$ .

Vậy ta sẽ tìm giá trị nhỏ nhất của  $f(t) = t^2 + \frac{4\sqrt{2}}{t}$  với  $t \geq 1$ .

Áp dụng BĐT côsi ta có  $f(t) = t^2 + \frac{2\sqrt{2}}{t} + \frac{2\sqrt{2}}{t} \geq 3\sqrt[3]{t^2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{t} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{t}} = 6$

**Truy cập website: [hoc360.net](http://hoc360.net) để tải tài liệu đề thi miễn phí**

---

Đẳng thức xảy ra khi  $t = \sqrt{2}$  hay  $a = b > 0, c = 0$  hoặc các hoán vị tương ứng.

Vậy  $\min P = 6$  khi và chỉ khi  $a = b > 0, c = 0$  hoặc các hoán vị tương ứng.

---

Group: <https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/>