$PT \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+6}+\sqrt{x-1}+x^2-7=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+6}-2)+(\sqrt{x-1}-1)+(x^2-4)=0 \quad (1)$

Ta có

$\forall x \ge 1: \sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4=(\sqrt[3]{x+6}+1)^2+3>0 \ \& \sqrt{x-1}+1>0$

Do đó $PT \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}+\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}+(x-2)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}+x+2\right]=0 \Leftrightarrow x=2$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài 3.35: a) Đặt $t=\sqrt{x^2+x+2},\ (t \ge 0) \Rightarrow x^2+x=t^2-2$

Phương trình trở thành: $t=t^2-2 \Leftrightarrow t^2-t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1(l) \\ t=2 \end{array}\right.$

Với $t=2$ ta có: $2=\sqrt{x^2+x+2},\ (t \ge 0) \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

b) Đặt $t=\sqrt{x^2-x+1},\ (t \ge 0) \Rightarrow x^2-x=t^2-1$

Phương trình trở thành: $4\ \ t^2-1\ \ +1=t \Leftrightarrow 4t^2-t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$

Từ đó phương trình có nghiệm là $x=0,\ x=1$

c) Điều kiện $x+3 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -3$. Đặt $t=\sqrt{x+3}, t \ge 0 \Rightarrow x=t^2-3$

Lúc đó phương trình đã cho trở thành:

$13(t^2-3)+2\left[3(t^2-3)+2\right]t+42=0 \Leftrightarrow 6t^3+13t^2-14t+3=0$

$\Leftrightarrow (t+3)(6t^2-5t+1)=0 \Leftrightarrow 6t^2-5t+1=0, (t \ge 0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{2} \\ t=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Từ đó $x=-\dfrac{11}{4}; x=-\dfrac{26}{9}$.

d) Đặt $t=\sqrt{-x^2+2x+24},\ (t \ge 0)$

$\Rightarrow -x^2+2x+24=t^2 \Rightarrow x^2-2x-22=2-t^2$

Phương trình trở thành: $2-t^2-t=0 \Leftrightarrow t^2+t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-2(l) \end{array}\right.$

Với $t=1$ ta có: $\sqrt{-x^2+2x+24}=1 \Leftrightarrow x^2-2x-23=0 \Leftrightarrow x=1 \pm 2\sqrt{6}$

e) ĐKXĐ: $-1 \le x \le 3, x \ne 1$.

PT $\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}\ \ \sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\ \ = \ 2x-1\ \ \ 2x-2$

$\Leftrightarrow \sqrt{-x^2+2x+3} = 2\ \ x^2-2x\ \ .$

f) Đặt $t=\sqrt{4x-1}$, ta có $t^4-4t^2+4t-1=0 \Leftrightarrow (t-1)^2(t^2+2t-1)=0$

ĐS: $x=\frac{1}{2},\ x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

g) Điều kiện: $-1 \le x < 0$

Chia cả hai vế cho x ta nhận được: $x+2\sqrt{x-\frac{1}{x}}=3+\frac{1}{x}$

Đặt $t=x-\frac{1}{x}$, ta được $t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3 \end{array}\right.$.

h) $x=0$ không phải là nghiệm , Chia cả hai vế cho x ta được: $\left(x-\frac{1}{x}\right)+\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}=2$

Đặt $t=\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}$, Ta có : $t^3+t-2=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Bài 3.36: a) $PT \Leftrightarrow -\ \ 3x-2\ \ +\sqrt{3x-2}+4x^2-18x+20=0$

Đặt $t=\sqrt{3x-2},\ t\ge 0$.

Phương trình trở thành $-t^2+t+4x^2-18x+20=0$, có $\Delta_t = \ \ 4x-9\ \ ^2$

Từ đó ta có nghiệm phương trình là $x=\frac{19+\sqrt{73}}{8},\ x=\frac{23-\sqrt{97}}{8}$

b) $PT \Leftrightarrow 2\ \ x+3\ \ +5x\sqrt{x+3}+3x^2-3x-18=0$

Đặt $t=\sqrt{x+3},\ t\ge 0$.

Phương trình trở thành $2t^2+5xt+3x^2-3x-18=0$

Có $\Delta_t = \ \ x+12\ \ ^2$. Từ đó ta có nghiệm phương trình là $x=1,\ x=-\frac{16+2\sqrt{10}}{9}$

c) $PT \Leftrightarrow -27\ \ x-2\ \ -51\sqrt{x-2}+3x^2-31x+56=0$

Đặt $t=\sqrt{x-2},\ t\ge 0$.

Phương trình trở thành $-27t^2-51t+3x^2-31x+56=0$

Có $\Delta_t=\left(18x-93\right)^2$

Từ đó ta có nghiệm phương trình là $x=\frac{25+3\sqrt{33}}{2},\ x=\frac{41-3\sqrt{93}}{6}$

d) $PT \Leftrightarrow -2\left(3x-1\right)+x\sqrt{3x-1}+x^2=0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{3x-1})(2\sqrt{3x-1}+x)=0$

Từ đó ta có nghiệm phương trình là $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Bài 3.37: • Với $x > 3$: Đặt $a = \sqrt{x+3}; b = \sqrt{x-3};\ a > 0, b > 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2x \\ a^2 - b^2 = 6 \end{cases}$

Phương trình trở thành:

$a^2 + b^2 + 2ab = \dfrac{4a^2}{b^4} \Leftrightarrow a + b = 2\dfrac{a}{b^2}$

$\Leftrightarrow \ a + b \quad a - b \ = \dfrac{2a \ \ a-b}{b^2} \Leftrightarrow 6b^2 = 2a \ \ a - b$

$\Leftrightarrow a^2 - ab - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2} b$

Do $a > 0, b > 0 \Rightarrow a = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} b$

Suy ra $\sqrt{x+3} = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\sqrt{x-3} \Leftrightarrow x = 8 - \sqrt{13}$ (thỏa mãn).

- Với $x \le -3$ tương tự ta có phương trình vô nghiệm.
- Với $-3 < x \le 3$ khi đó phương trình không xác định nên nó vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 8 - \sqrt{13}$.

Bài 3.38: Xét phương trình $\sqrt{x^2 - x + 1} = -x - 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le -2 \\ x^2 - x + 1 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -2 \\ x = -\dfrac{3}{5} \end{cases}$ (vô nghiệm)

Suy ra $\sqrt{x^2 - x + 1} + x + 2 \ne 0$ do đó

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} - \ \ x + 2 \ = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2} - \ \ x + 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{-5x - 3}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x + 2} = \dfrac{-5x - 3}{x^2 + 2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x + 3 = 0 \\ \sqrt{x^2 - x + 1} + x + 2 = x^2 + 2 \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{5} \\ \sqrt{x^2 - x + 1} = x^2 - x \ (**) \end{array} \right.$

Ta có (**) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \ge 0 \\ x^2 - x + 1 = \left(x^2 - x\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3 + 2\sqrt{5}}}{2}$

Suy ra phương trình có nghiệm là $x \in \left\{ -\dfrac{3}{5}; \dfrac{1 - \sqrt{3 + 2\sqrt{5}}}{2}; \dfrac{1 + \sqrt{3 + 2\sqrt{5}}}{2} \right\}$

Bài 3.39: a) $PT \Leftrightarrow (x-1)(2x-1)(x+2)(x+2) = 0$

b) $PT \Leftrightarrow (x-2)(2x-3)(x+2)(x+1)(2x-1) = 0$

c) $PT \Leftrightarrow (x^2+1)(x-2)(x+3) = 0$

d) $PT \Leftrightarrow (x^2+1)(x^2+2)(x-2) = 0$

Bài 3.40: a) $(x^2-x+1)^2-3x^2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1-\sqrt[4]{12}+\sqrt{3}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{1-\sqrt[4]{12}+\sqrt{3}}{2}$

b) $PT \Leftrightarrow (x^2-x-1)(x^2+x+1)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Bài 3.41: $PT \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-2mx+m^2-m+1\right)=0$

Từ đó suy ra $2\neq m>1$.

Bài 3.42: a) Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình

Với $x\neq 0$ ta có $PT \Leftrightarrow 2x^2+3x-16+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}=0 \Leftrightarrow 2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-16=0$

Đặt $y=x+\dfrac{1}{x}$ thì $y^2-2=x^2+\dfrac{1}{x^2}$

Phương trình trở thành: $2\left(y^2-2\right)+3y-16=0 \Leftrightarrow 2y^2+3y-20=0$

Phương trình này có nghiệm là $y_1=-4, y_2=\dfrac{5}{2}$

Vì vậy $x+\dfrac{1}{x}=-4$ và $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$ tức là $x^2+4x+1=0$ và $2x^2-5x+2=0$

Từ đó ta tìm được các nghiệm là: $x=-2\pm\sqrt{3}, x=\dfrac{1}{2}, x=2$.

a) Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình . Chia hai vế của phương trình cho x^3, ta được: $x^3+\dfrac{1}{x^3}+3(x^2+\dfrac{1}{x^2})-6(x+\dfrac{1}{x})-21=0$.

Đặt $t=x+\dfrac{1}{x}$, $|t|\geq 2$. Ta có : $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2;\ x^3+\dfrac{1}{x^3}=t(t^2-3)$.

Nên phương trình trở thành : $t(t^2-3)+3(t^2-2)-6t-21=0$

$\Leftrightarrow t^3+3t^2-9t-27=0 \Leftrightarrow (t+3)^2(t-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-3 \end{array}\right.$.

* $t=3 \Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}=3 \Leftrightarrow x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

* $t=-3 \Leftrightarrow x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Vậy phương trình có bốn nghiệm $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2};\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

b) . Đặt $x=t+1$, ta có: $t+4\ ^4+\ t-4\ ^4=1312$

$\Leftrightarrow t^4+96t^2-400=0 \Leftrightarrow t^2=4 \Leftrightarrow t=\pm 2$

Suy ra $x=3, x=-1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

c) Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình nên

Phương trình $\Leftrightarrow\ 32x^2+52x+15\quad 32x^2-46x+15\ -99x^2=0$

$\Leftrightarrow \left(36x + 52 + \dfrac{15}{x}\right)\left(32x - 46 + \dfrac{15}{x}\right) - 99 = 0$.

Đặt $t = 32x + \dfrac{15}{x}$.Ta có:

$t + 52 \quad t - 46 \quad - 99 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 6t - 2491 = 0 \Leftrightarrow t = 47, t = -53$

• $t = 47 \Leftrightarrow 32x^2 - 47x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = \dfrac{15}{32}$

• $t = -53 \Leftrightarrow 32x^2 - 53x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{53 \pm \sqrt{889}}{64}$.

Vậy tập nghiệm phương trình đã cho là: $\left\{1, \dfrac{15}{32}, \dfrac{53 \pm \sqrt{889}}{64}\right\}$.

d) Phương trình $\Leftrightarrow \quad x^2 - m \quad ^2 + \quad 2m - 9 \quad x^2 - 2x + 15 - m^2 = 0$

Ta chọn m sao cho $\Delta' = 1 - \quad 15 - m^2 \quad 2m - 9 \quad = 0$ ta tìm được $m = 4$

Nên ta có: $\quad x^2 - 4 \quad ^2 - \quad x - 1 \quad ^2 = 0 \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 5 \quad x^2 - x - 3 \quad = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + x - 5 = 0 \\ x^2 - x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $\left\{\dfrac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}; \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}\right\}$.

e) Ta thấy $x = -1$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế cho $x^3 + 1$ ta được: $2\dfrac{x^2 - x + 1}{x + 1} + 5\dfrac{x + 1}{x^2 - x + 1} = 11$.

Đặt $t = \dfrac{x^2 - x + 1}{x + 1} \Rightarrow 2t + \dfrac{5}{t} = 11 \Leftrightarrow 2t^2 - 11t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = 5, t = \dfrac{1}{2}$.

• $t = 5 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - x + 1}{x + 1} = 5 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{13}$

• $t = 5 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - x + 1}{x + 1} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = \dfrac{1}{2}$.

Bài 3.43: Phương trình $\Leftrightarrow (x - 1)(x + 5)(x + 1)(x + 3) = m$

$\Leftrightarrow (x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) = m$

Đặt $t = x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4 \geq -4$,ta có phương trình :

$\Leftrightarrow (t - 5)(t + 3) = m \Leftrightarrow t^2 - 2t - 15 = m \quad (2)$.

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t \geq -4$.

Với $t \geq -4 \Rightarrow t^2 - 2t - 15 = (t-1)^2 - 16 \geq -16 \Rightarrow$(2) có nghiệm $t \geq -4 \Leftrightarrow m \geq -16$.

Bài 3.44: Phương trình $\Leftrightarrow (x^2 - 2x)^2 - 4(x^2 - 2x) = m$

Đặt $t = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \geq -1$. Phương trình trở thành: $t^2 - 2t = m$ (*).

Phương trình có bốn nghiệm phương trình $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt $t > -1$.

Xét hàm số : $f(t) = t^2 - 2t$ với $t \geq -1$, ta có bảng biến thiên:

t	-1	1	$+\infty$
$f(t) = t^2 - 2t$	3 ↘	-1 ↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow -1 < m < 3$.